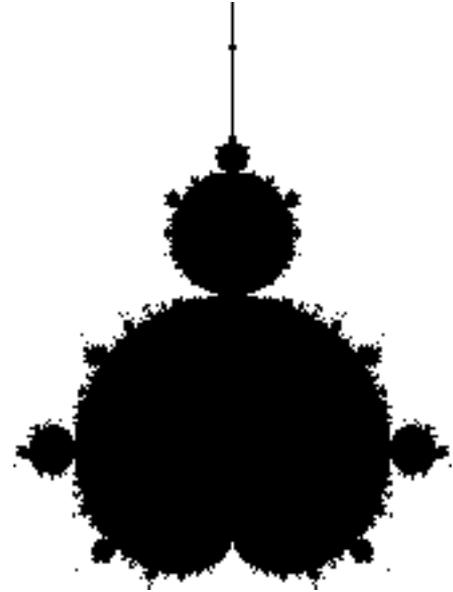
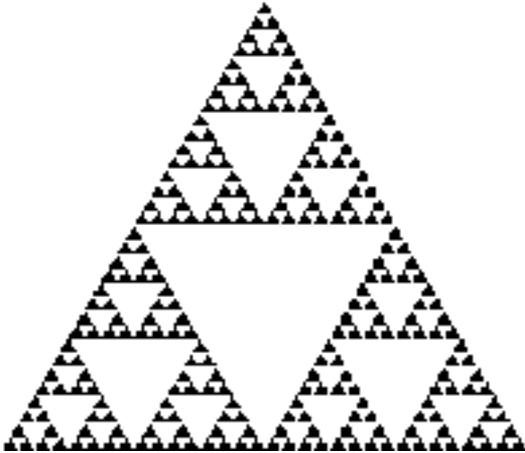


## "Chaosforschung": Fraktale - Chaos - Ordnung

Vortrag in Schwerte am 30.1.1995

Jürgen Giesen, Frankenkamp 12 a, 59514 Welver



Lange bevor es Menschen auf Erden gab, wuchsen in der Erdkruste schon die Kristalle. Eines Tages sah ein Mensch zum ersten Mal solch ein glitzerndes Stückchen Regelmäßigkeit liegen, oder er stieß darauf mit seiner steinernen Hacke, und es brach ab und fiel vor seine Füße, und er hob es auf und betrachtete es in seiner offenen Hand, und er wunderte sich." (M.C. Escher)

"Nur wer Chaos im Herzen trägt, kann Sterne gebären"

(F. Nietzsche)

1.	Vorbemerkungen.....	2
2.	Fraktale .....	3
2.1.	Chaos-Spiel und Sierpinski-Dreieck.....	3
2.2.	Mandelbrot-Menge .....	4
2.2.	Cantor-Staub und Kochsche Schneeflocke.....	5
2.3.	Natürliche Fraktale und Selbstähnlichkeit.....	8
2.4.	Goldener Schnitt.....	9
2.5.	Selbstähnlichkeit bei M.C. Escher.....	10
3.	Wissenschaftsgeschichtliches.....	11
3.1.	Newton und das mechanistische Naturbild.....	11
3.2.	Poincaré und der Zufall.....	12
3.3.	Boltzmann und der Pfeil der Zeit.....	13
3.4.	Lorenz und der Schmetterlingseffekt .....	14
4.	Das logistische Populationsmodell.....	14
4.1.	Zeitreihen .....	15
4.2.	Sensitivität.....	16
4.3.	Feigenbaum-Diagramm .....	19
5.	Beispiele für Chaos und Ordnung .....	21
5.1.	Kardiologie.....	21
5.2.	Zelluläre Automaten.....	23
5.3.	Musterbildung in Flüssigkeiten.....	25
5.4.	Neuronale Netze.....	27
5.5.	Video-Rückkopplung.....	30
5.6.	Selbstähnlichkeit bei Tönen .....	31
5.7.	Ökonomie.....	32
5.8.	Fraktale Dimension.....	33
6.	Schlußbemerkung .....	34
7.	Quellen und Medien .....	35

## 1. Vorbemerkungen

Die "Chaosforschung" hat in den letzten Jahren große Beachtung in der Öffentlichkeit gefunden. Man könnte sogar von einer "Chaoswelle" sprechen. Sie äußert sich in Dutzenden von populärwissenschaftlichen Büchern, Artikeln in populärwissenschaftliche Zeitschriften und Tageszeitungen, einer dreiteilige Spiegel-Serie (1993), in Fernsehsendungen.

Dieses ungewöhnlich breite Interesse hat mehrere Gründe:

- die Faszination des Wortes "Chaos", das in unserem alltäglichen Sprachgebrauch ein regelloses und unbezwingbares Durcheinander und das Gegenteil von Ordnung bezeichnet. Darüber hinaus beginnen viele Schöpfungsmythologien mit dem Chaos als dem ungeformten Urstoff, als Vorstufe eines geordneten Kosmos;
- die Faszination bunter und bizarrer Bilder von sog. "Fraktalen", von denen das bekannteste das "Apfelmännchen" ist;
- die vielversprechenden Titel in den genannten Medien, die die universelle Bedeutung der Chaosforschung betonen, z.B. "Prinzip Chaos - Die neue Ordnung des Universums", "Chaos und Kreativität", "Chaosforschung - Revolution der Wissenschaften" oder "Chaosforschung revolutioniert unser Weltbild"

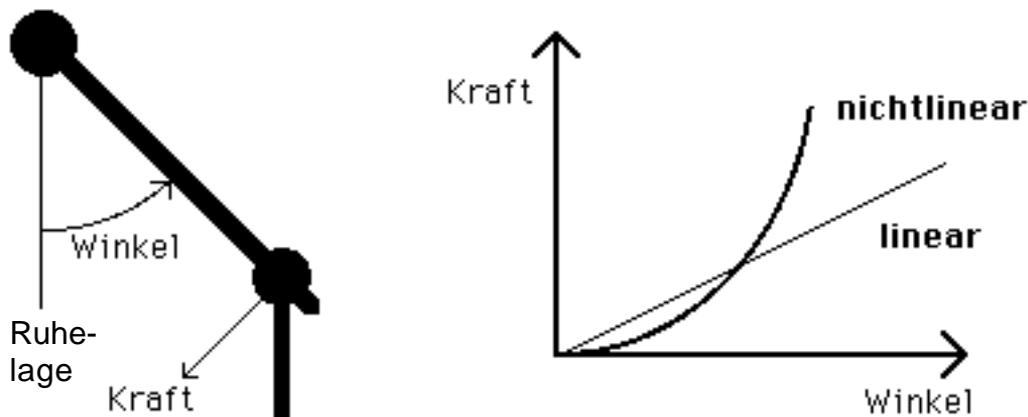
Die Welle der Begeisterung hat nicht nur Mathematik und Naturwissenschaften ergriffen, sondern auch Wirtschafts-, Gesellschafts- und Geisteswissenschaften. So entstehen Erwartungen, die Chaosforschung könne künftig politische Krisen wie den Zusammenbruch der Sowjetunion oder einen Börsencrash voraussagen.

Die sog. "Chaostheorie" ist im Kern eine *mathematische* Theorie. Sie beschäftigt sich mit *dynamischen Systemen*, das sind Systeme, deren Zustand sich mit der Zeit ändert und in denen *nichtlineare* Zusammenhänge auftreten.

Eine treffendere Bezeichnung der "Chaostheorie", die sich *seit etwa 1975* als eigenständige Disziplin etabliert hat, lautet daher

*"Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme"*

Ein Beispiel aus dem Bereich der Physik ist das Doppelpendel: Die Zustandsänderung besteht hier in der Bewegung und die Nichtlinearität darin, daß die zur Ruhelage wirkende Kraft nicht gleichmäßig mit dem Winkel ansteigt.



Die Bewegung des Doppelpendels setzt sich in komplizierter Weise aus Schwingungen und Überschlagen des kleinen Pendels zusammen; sie ist regellos und "chaotisch".

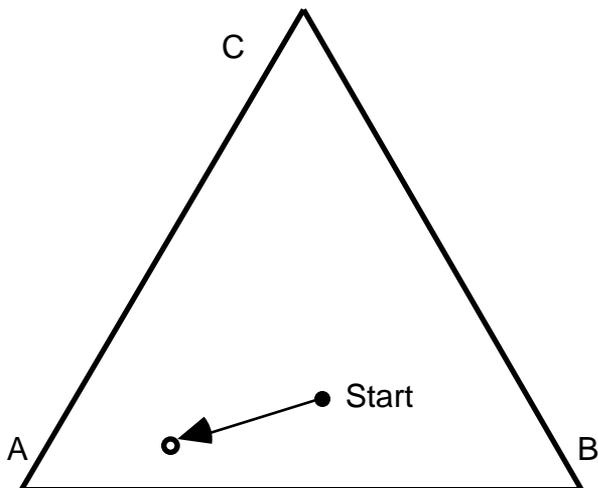
Eine wesentliche Aussage der Theorie nichtlinearer Systeme besagt:

*Es kann unmöglich sein, das zukünftige Verhalten vorauszuberechnen, auch wenn alle Gesetze, die das Verhalten bestimmen, exakt bekannt sind.*

Trotz prinzipieller Berechenbarkeit ist *keine Langzeitprognose* möglich. Man spricht daher auch vom "*deterministischen Chaos*".

## 2. Fraktale

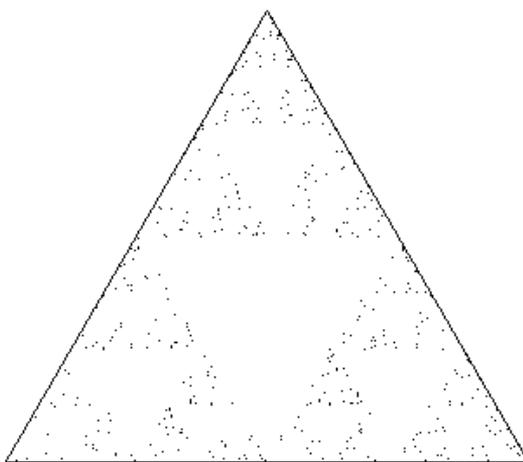
### 2.1. Chaos-Spiel und Sierpinski-Dreieck



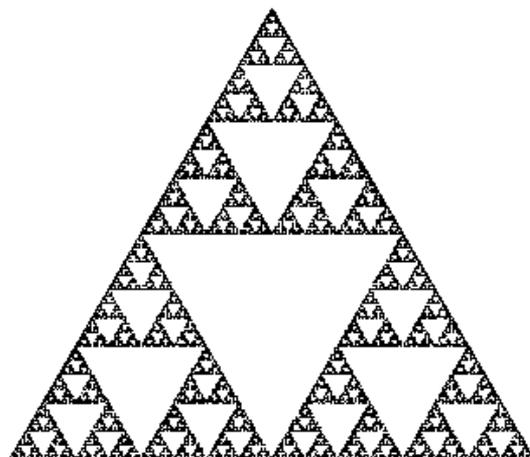
Regeln des Chaos-Spiels:

1. Markiere einen beliebigen Startpunkt im Dreieck ABC.
2. Würfle und gehe von diesem Punkt aus um Hälfte der Strecke in Richtung
  - A, wenn der Würfel 1 oder 2 zeigt,
  - B bei 3 oder 4 Augen
  - C bei 5 oder 6 Augen.
3. Wiederhole mit dem so erhaltenen neuen Punkt Schritt 2.

Da der Zufall bekanntlich blind ist, erwartet man, daß die Spielpunkte gleichmäßig im Dreieck verteilt sind. Die beiden Bilder zeigen das Ergebnis nach 500 bzw. 25000 Würfeln:



500 Würfel



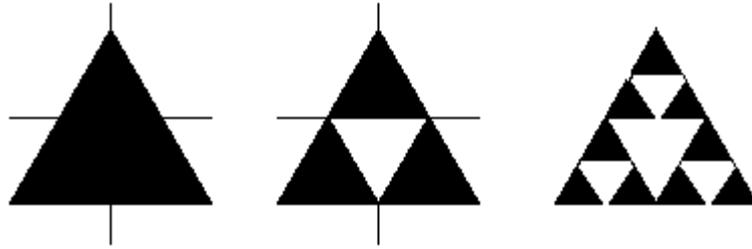
25000 Würfel

Es erscheint ein vollkommen regelmäßiges Gebilde, das eine allerdings bizarre Struktur aufweist.. Überraschend ist, daß der Zufall ein absolut regelmäßiges Gebilde hervorbringen kann.

Man bezeichnet es als *Sierpinski-Dreieck*, das der polnische Mathematiker Waclaw Sierpinski 1916 ausführlich beschrieben hat. Als geometrische Figur ist das Sierpinski-Dreieck schon viel länger bekannt: man findet es in italienischen Kathedralen aus dem 12. Jahrhundert als Fußbodenmosaik und an einer Kanzel.

Das Konstruktionsverfahren ist einfach:

- Man beginnt mit einem schwarzen Dreieck, halbiert die Seiten und nimmt das Dreieck heraus, das durch die Seitenmittelpunkte gegeben ist;



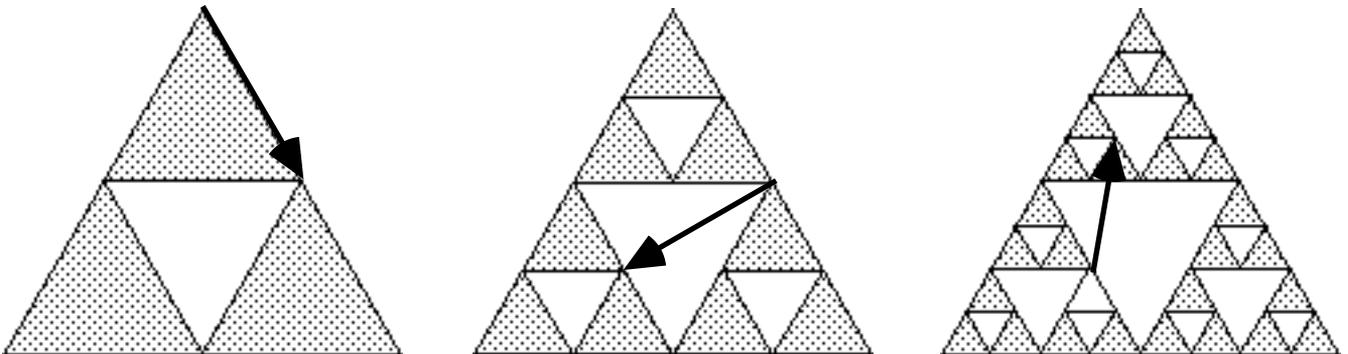
- es bleiben 3 schwarze Teildreiecke übrig, bei denen man wiederum die Mitte herausnimmt;
- usw.

Das Sierpinski-Dreieck besteht aus Flächenstücken, die immer und immer wieder durchbrochen und zersplittert sind. Man nennt solche und ähnliche geometrische Gebilde heute *Fraktale*. Diese Bezeichnung führte der Mathematiker Benoît *Mandelbrot* im Jahre 1975 ein. Im "Duden" findet man das Wort erstmals in der 20. Auflage von 1991.

*Mathematisch* betrachtet handelt es sich beim Chaos-Spiel und der wiederholten Abbildung des Spielpunktes um ein "iteriertes Funktionensystem"; die Spielpunkte nähern sich bei Wiederholung (Iteration) immer mehr der Punktmenge des Sierpinski-Dreiecks an, das den Grenzwert (Attraktor) der Iteration darstellt.

Die geordnete Struktur folgt aus der Abbildungsvorschrift "Gehe um die halbe Strecke bis zum Eckpunkt". Der Zufall bestimmt nur, welche von drei gleichwertigen Abbildungen als nächste angewandt wird und hat keinen Einfluß auf das als Grenzwert entstehende Gebilde.

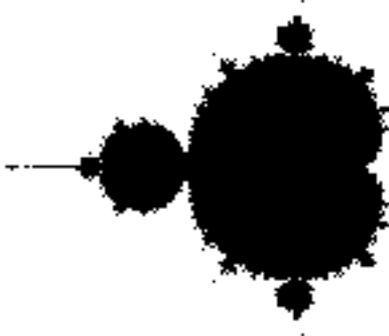
Die Entstehung wird plausibel, wenn man mit einer Ecke als Startpunkt, z.B. beginnt: die erzeugten Punkte sind dann Eckpunkte eines Teildreiecks der jeweils nächsten Konstruktionsstufe:



## 2.2. Mandelbrot-Menge

Das populärste Beispiel eines Fraktals ist das Apfelmännchen. Die ersten Computerbilder erzeugte der Mathematiker Benoît Mandelbrot im Jahre 1980.

Die Mandelbrot-Menge steht in engem Zusammenhang mit Mengen, die französische Mathematiker bereits während des Ersten Weltkriegs untersucht haben, allerdings ohne die Hilfe von Computern.



Das Apfelmännchen entsteht ebenfalls durch die wiederholte Abbildung eines Startpunktes  $c$  nach der Vorschrift:

$$z = z^2 + c$$

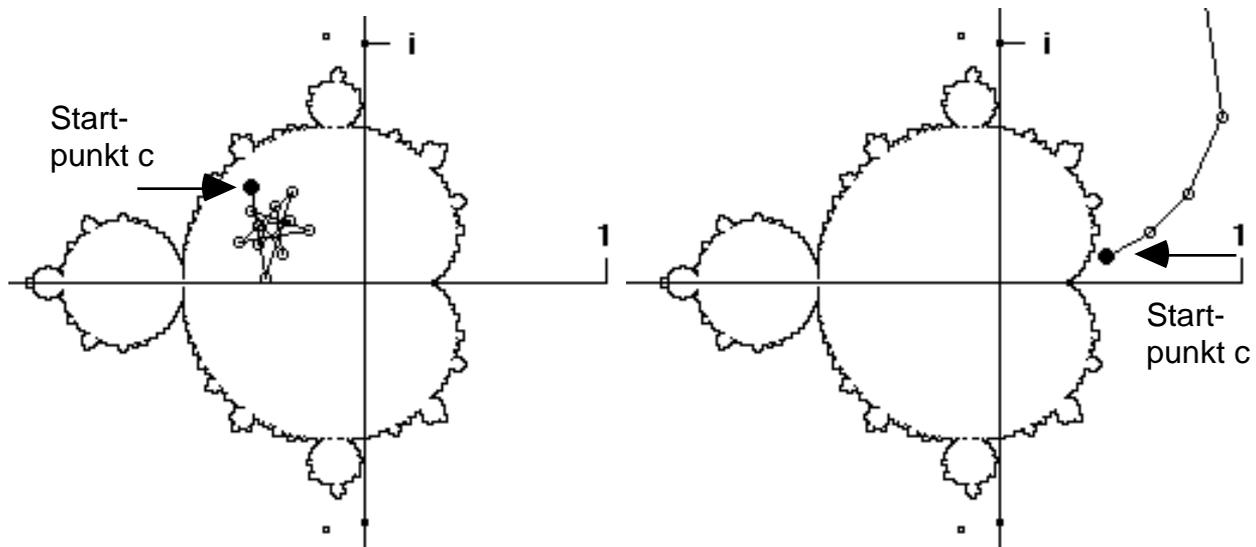
mit  
Startwert  $z_0 = 0$   
und  $c$  fest

$z$  und  $c$  sind komplexe Zahlen, die in der Ebene einen Punkt darstellen.

Man kann die Iteration für jeden Punkt  $c$  der Ebene durchführen. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Alle Punkte der Iteration bleiben im *Endlichen* gefangen, in diesem Fall gehört der Punkt  $c$  zur Mandelbrot-Menge, und sein Bild wird *schwarz* gefärbt.
2. Die Punkte der Iteration entweichen ins *Unendliche*; der Punkt  $c$  gehört dann *nicht* zur Mandelbrot-Menge und bleibt weiß; man kann ihm aber auch eine Farbe zuordnen, je nachdem wie schnell die Iteration entflieht.

Die Mandelbrot-Menge stellt die "Gefangenenmenge" der angegebenen Iteration dar.



Punkte bleiben im Endlichen gefangen

Punkte fliehen ins Unendliche

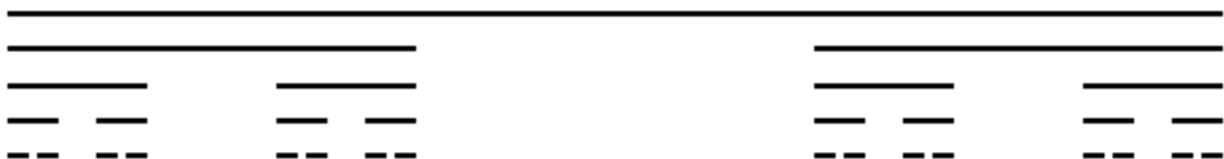
Das Apfelmännchen weist eine ungeheuer komplexe Struktur; die Ränder sind unendlich verkrumpelt und weisen feinste Verästelungen auf, an denen verkleinerte Kopien des Ganzen hängen, an deren Verästelungen nochmals verkleinerte Kopien hängen, usw. ad infinitum. Für Chaos-Enthusiasten ist die Mandelbrot-Menge wie eine Ikone und als das schönste und komplizierteste Objekt, daß die Mathematik je hervorgebracht hat.

Bei nüchterner Betrachtung offenbart sie keine besonders tiefen Einsichten über Mathematik und schon gar nicht über die Natur, stellt aber ein interessantes Beispiel für experimentelle Mathematik und Computereinsatz dar.

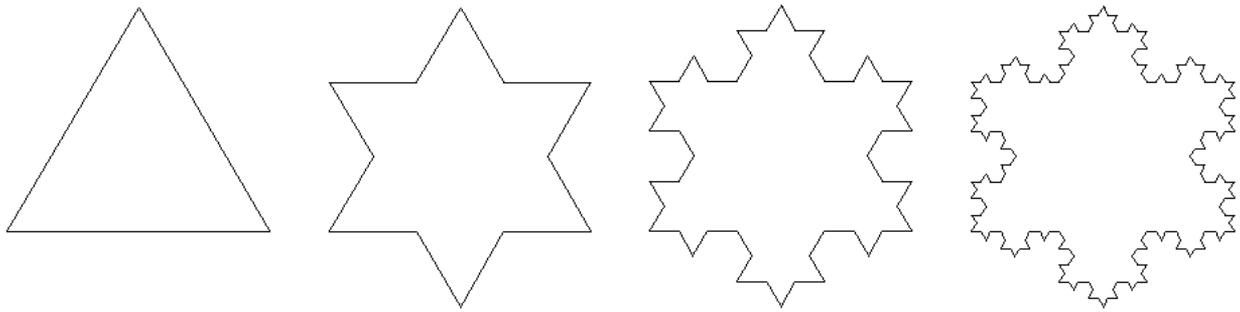
## 2.2. Cantor-Staub und Kochsche Schneeflocke

Erste Beispiele mathematischer Fraktale stammen von den Mathematikern Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, und von Helge von Koch.

*Der Cantor-Staub: (1872):* Man geht von Strecke aus ("Initiator"), schneidet das mittlere Drittel heraus ("Generator") und wiederholt dies immer wieder bei den verbleibenden Strecken:

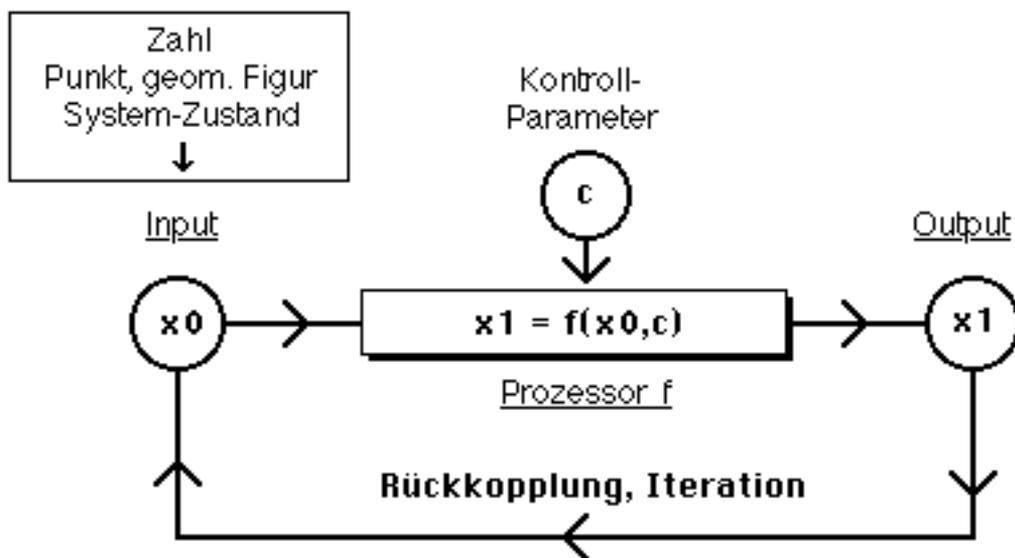


*Die Kochsche Schneeflocke: (1904):* Sie entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck, indem das mittlere Drittel jeder Seite durch eine aufgesetzte "Spitze" ersetzt wird.



Sierpinski-Dreieck, Mandelbrot-Menge, Cantor Staub und Kochsche Schneeflocke zeigen , wie Iteration zu fraktalen Strukturen führt.

Den Mechanismus der Iteration stellt das folgende Diagramm dar:



Der *Input* kann ein mathematisches Objekt sein, d.h. eine Zahl, ein Punkt , ein geometrisches Gebilde. Der *Prozessor* berechnet dann daraus als *Output* eine neue Zahl oder konstruiert einen neuen Punkt oder eine neue geometrische Figur .

Der Input kann - wie beim Doppelpendel - auch der momentane Zustand eines Systems sein, aus dem sich jeweils durch Rückkopplung sein späterer Zustand entwickelt.

Iteration spielt eine wichtige Rolle bei der Dynamik von Systemen in der Natur, d.h. bei ihren zeitlichen Entwicklung; man spricht auch von *Rückkopplung*.

Durch Rückkopplung und Iteration kann sowohl *Ordnung* als auch *Chaos* entstehen .



### Natürliche Fraktale und Selbstähnlichkeit

Mandelbrot war der erste Mathematiker, der sich systematisch mit Fraktalen beschäftigte; er konnte dabei auf mathematische Grundlagen und Begriffe der letzten 100 Jahre zurück-greifen (Cantor, von Koch, Peano, Hilbert, Hausdorff) ; 1982 erschien sein Buch "Die fraktale Geometrie der Natur", in dem er die fraktale Geometrie zum Programm erhebt. In der Einleitung heißt es:

"Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade."

Ein wichtiges Merkmal von Fraktalen ist ihre *Selbstähnlichkeit*.. Beim Sierpinski-Dreieck ist jedes Teildreieck eine verkleinerte aber vollständige Kopie des Ganzen, und jedes Teil hiervon wiederum, usw. ad infinitum. Man spricht von "exakter Selbstähnlichkeit".

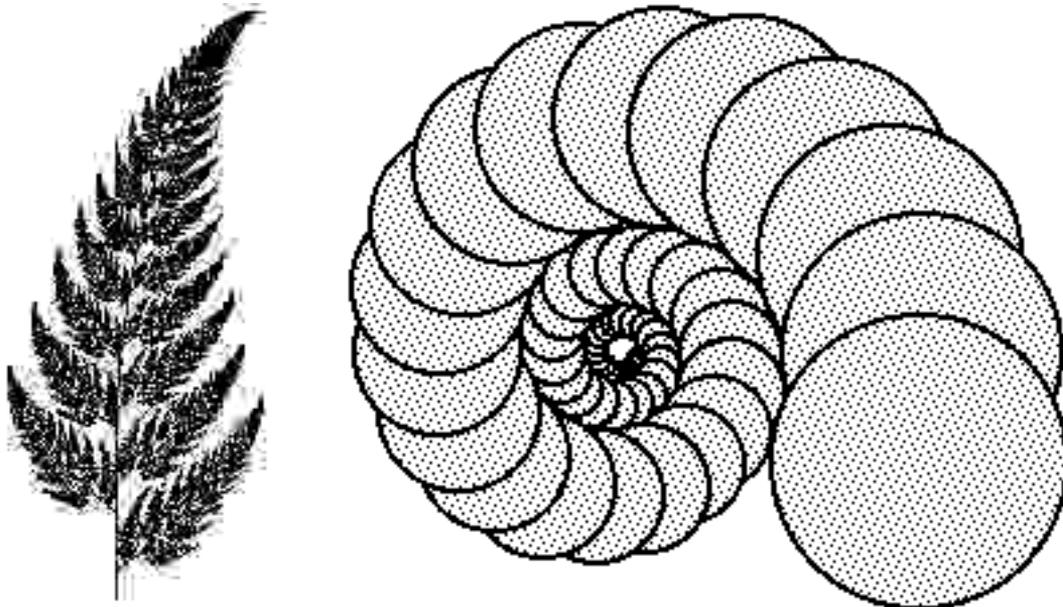
Selbstähnlichkeit und fraktale Struktur kommen in der Natur sehr häufig vor. Eines der Paradebeispiele ist der *Blumenkohl*. [Bild aus: Peitgen: Bausteine des Chaos: Fraktale]. Er besteht aus kleineren Röschen, die dem ganzen Kopf sehr ähnlich sehen; diese Röschen lassen sich wieder in kleinere zerlegen, die den vorherigen und auch dem Ganzen ähnlich sind. Diese Selbstähnlichkeit kann man über 3 bis 4 Stufen verfolgen.

Ohne den eingeblendeten Maßstab ist nicht zu erkennen, zu welcher Stufe ein Bild gehört, d.h. es *fehlt ein natürlicher Maßstab* (Skaleninvarianz).

Der Schnitt durch die Schale des *Muscheltieres* Nautilus [Bild aus: Behr] zeigt eine punktartige Selbstähnlichkeit, die mathematisch durch eine logarithmische Spirale beschrieben werden kann.

Logarithmische Spiralen finden sich auch in der Blüte der *Sonnenblume* [Bild aus: Behr].

Wenn die Struktur eines natürlichen Fraktals entschlüsselt ist, so kann man umgekehrt per Computer Modelle erzeugen, die ihren natürlichen Vorbildern zum Verwechseln ähnlich sind (Farn, Muscheltier).



Die Entdeckung von Fraktalen und Selbstähnlichkeit in verschiedensten Bereichen der belebten und unbelebten Natur ist sicherlich interessant, manchmal sogar erstaunlich und verblüffend. Die Untersuchung von Naturphänomenen darf aber nicht bei der bloßen *Beschreibung* bleiben. Vielmehr streben die Naturwissenschaften nach möglichst weitgehendem Verstehen und *Erklären* in dem Sinne, daß vielfältige Erscheinungen auf wenige grundlegende Gesetzmäßigkeiten zurückgeführt werden können.

In vielen Fällen ist es möglich, Form und Funktion in Einklang zu bringen, etwa durch das Bauprinzip der möglichst geringen gegenseitigen Behinderung von Blättern o.ä. In diesem Sinne ist es aber wenig nutzbringend, wenn es heißt "Jeder Baum ist im Prinzip ein verlangsamter Blitz" (F. Cramer, Frankfurter Rundschau, 1.6.1993).

#### 2.4. Goldener Schnitt

Ein weiteres Beispiel für Selbstähnlichkeit ist der *goldene Schnitt* : man versteht darunter die Teilung einer Strecke in einem bestimmten, als harmonisch empfundenen Verhältnis: der kleinere Teil steht zum größeren in demselben Verhältnis wie der größere zum Ganzen. Der goldene Schnitt findet sich vielfach in der Natur, z.B. auch in der Anatomie des Menschen.

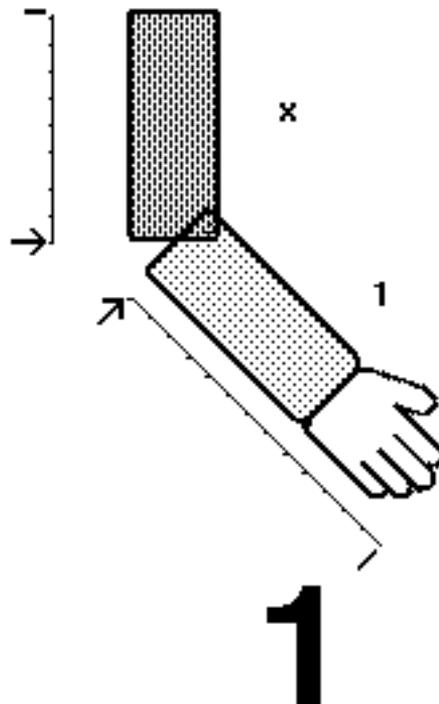
In einem Holzschnitt zergliedert und unterteilt Albrecht Dürer den Körper durch Maße. Er stammt aus "*Vier Bücher von menschlicher Proportion*", erschienen in seinem Todesjahr 1528; sie richten sich als Unterrichtswerk an junge Künstler und zeigen Dürers Bemühen um Schönheit in der Kunst und den Versuch der Renaissance, die Kunst wissenschaftlich zu begründen.

Der Ellenbogengelenk teilt den ganzen Arm (mit Hand) im goldenen Schnitt."

$$\frac{\text{Oberarm}}{\text{Unterarm}} = \frac{\text{Unterarm}}{\text{ganzer Arm}}$$

$$\frac{8}{13} \approx \frac{13}{21}$$

$$0,615.. \approx 0,619..$$



$$x = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x = 0,61803...$$

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Die Folge der Kettenbrüche  
1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21

enthält die Folge der Fibonacci-Zahlen:  
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

Die Zahl des goldenen Schnitts  $x=0,61803\dots$  ist eine "irrationale Zahl", d.h. sie hat unendlich viele Dezimalstellen, die sich niemals wiederholen. Die Besonderheit dieser Zahl zeigt sich in

ihrer "Kettenbruchdarstellung", die aus lauter Einsen besteht und sogar als Schreibfigur Selbstähnlichkeit aufweist:

### *2.5. Selbstähnlichkeit bei M.C. Escher*

Beispiele für Selbstähnlichkeit und viele Bezüge zur Mathematik finden sich im Werk des holländischen Grafikers Maurits Cornelis Escher (1898 -1972).

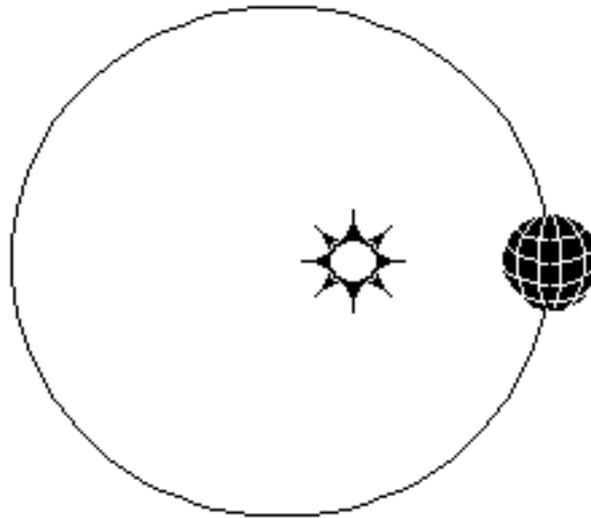
Escher beschreibt sein Blatt "Kreislimit III" (1959, Holzschnitt, Durchmesser 41,5 cm): "Weiße kreisförmige Linien schneiden und teilen einander in Stücke, die jeweils die Länge eines Fisches haben. Sie geben die Bahnen an, auf denen sich Reihen von Fischen von unendlich klein über die maximale Größe bis zu unendlich klein fortbewegen. Jede Reihe enthält nur Fische einer Farbe. Mindestens vier Farben sind nötig, damit sich die Reihen voneinander abheben."

### 3. Wissenschaftsgeschichtliches

#### 3.1. Newton und das mechanistische Naturbild

Wir beginnen den Rückblick in die Wissenschaftsgeschichte mit Isaac Newton (1643 -1727) und seiner Himmelsmechanik, die eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Chaostheorie gespielt hat.

Im Jahre 1687 erschien Newtons Werk "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Es liefert die theoretische Grundlage der Mechanik und enthält auch das von Newton gefundene Gravitationsgesetz; dieses Gesetz beschreibt die Schwerkraft zwischen zwei Körpern und gilt nicht nur für irdische Objekte, sondern für alle Körper des Weltalls.



Beispiel: Sonne/Erde

Für den Fall von nur 2 beteiligten Körpern (Sonne, Erde) gibt es eine exakte Lösung: die Bahnkurve ist eine Ellipse, und die Position der Erde lässt sich für Vergangenheit und Zukunft beliebig genau berechnen.

Newtons Mechanik fand glänzende Bestätigungen im Bereich der Astronomie (z. B. Vorausberechnung der Wiederkehr des Halleyschen Kometen 1758/59) und hatte über zwei Jahrhunderte unerschütterlichen Bestand. Zusammen mit späteren Erkenntnissen der Chemie bildete sie die Grundlage des mechanistischen Naturbildes:

- die Zustandsentwicklung eines Systems ist vollständig *determiniert* und berechenbar
- es gibt keinen Unterschied zwischen Vergangenheit und Zukunft
- Newtonsche Systeme altern nicht, sie haben keine "Geschichte" (keine "Historizität")
- Newtons Welt ist eine statische Welt des Seins ohne Werden
- Die Arbeitsweise ist *reduktionistisch*, d.h. ein komplexes und im ganzen unübersehbares System wird soweit in Teilstrukturen zerlegt, bis diese verstehbar und mit der Theorie zu behandeln sind.
- Das *Experiment* spielt seit der Zeit Newtons bis heute eine entscheidende Rolle, weil es empirische Informationen über die Natur aktiv erzeugen kann, auch wenn es unter künstlichen Umständen erfolgt. Denn beide Informationsquellen, Beobachtung und Experiment, liefern die empirischen Daten nur unter theoretischen Vorgaben. Inhalt der Theorie ist nicht die Natur selbst, sondern unser Bild von der Natur. Einstein drückte es so aus: "Erst die Theorie entscheidet darüber, was man beobachten kann."

Zu den bekanntesten Vertretern des mechanistischen Weltbildes gehört Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827).

Seine berühmt gewordene Formulierung (1814) kleidet das mechanistische Ideal in ein anschauliches Bild:

"Eine Intelligenz, die für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennte, und überdies umfassend genug wäre, um diese Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Körper des Universums und die des kleinsten Atoms umfassen. Für sie wäre nichts ungewiß, und die Zukunft ebenso wie die Vergangenheit lägen ihr offen vor Augen."  
(Laplacescher Dämon)

Laplace kannte natürlich die Bedeutung des Zufalls und die Nichtberechenbarkeit bei alltäglichen Vorgängen, z.B. beim Würfeln: aus klassischer Sicht liegt ihr Grund in der großen Anzahl von Ursachen und in ihrer unvollständigen Kenntnis, so daß die Unvollkommenheit des menschlichen Geistes die Kategorie der Wahrscheinlichkeit in der Naturerkenntnis erfordert. Zufall und Wahrscheinlichkeit stellten aber nicht den Determinismus in Frage.

Die weitere Entwicklung der Himmelsmechanik im 19. Jahrhundert zeigte dann, daß die Quelle der Zufälligkeit eben nicht durch Unwissen oder Unzulänglichkeit unseres Erkenntnisvermögens bedingt ist, sondern eine fundamentale Unbestimmtheit darstellt. Diese Einsicht ist von großer Bedeutung für die Chaostheorie.

### 3.2. Poincaré und der Zufall

Newton beschäftigte sich auch mit dem Fall von *drei* Körpern: z.B. Sonne mit Erde und Jupiter, dem schwersten Planeten (318 Erdmassen); er konnte zwar die Gleichungen aufstellen, aber ihre Lösung fand er nicht.

Die größten Mathematiker bissen sich am Drei-Körper-Problem die Zähne aus, und auch an der Frage, ob das Planetensystem überhaupt *stabil* ist. Können sich die Planeten gegenseitig so beeinflussen, daß eine Kollision möglich ist, daß einer der Sonne zu nahe kommt oder aus dem Sonnensystem herauskatapultiert wird?

Die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems wurde Gegenstand eines mathematischen Wettbewerbs, der zum 60. Geburtstag von Oskar II, König von Norwegen und Schweden, im Jahre 1889 stattfand. Solche mathematischen Wettbewerbe mit ansehnlichen Preisgeldern wurden seit Newtons Zeit von Regierungen oder wissenschaftlichen Gesellschaften veranstaltet.

Eine der eingereichten Arbeiten stammte von *Henri Poincaré* (1854 - 1912), Professor an der Sorbonne. Er gewann den Preis, ohne die gestellte Frage nach der Stabilität des Sonnensystems zu beantworten. Er bewies, daß es eine allgemeine analytische Lösung des Drei-Körper-Problems nicht gibt. Stattdessen lassen sich Lösungen nur in Form unendlicher Summen angeben, die im allgemeinen keinen Grenzwert besitzen. Poincaré zeigte mit einer neuartigen Methode (Zuhilfenahme geometrischer Modelle, Phasenraum), daß es Bereiche gibt, in denen sich die zukünftige Entwicklung des Systems nicht genau vorhersagen läßt und die wir heute "chaotisch" nennen.

Er formulierte es 1903 in seinem Buch "Wissenschaft und Methode" in sehr verständlicher Sprache:

"Eine sehr kleine Ursache, die uns entgehen mag, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht ignorieren können, und wir sagen dann, daß dieser Effekt auf Zufall beruht."

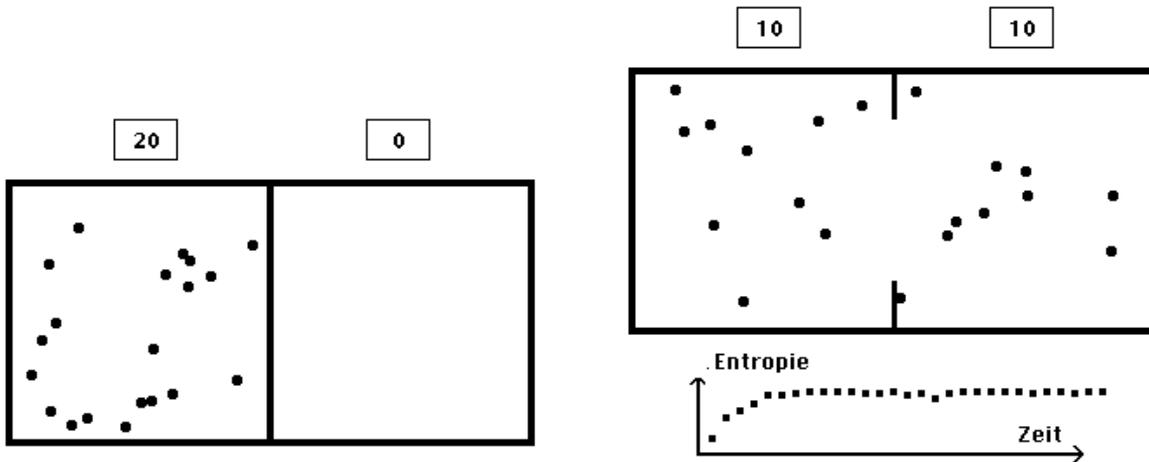
Poincaré stellt dar, daß die widersprüchlichen Begriffe Zufall und Determinismus durch die Unmöglichkeit der Langzeitvorhersage versöhnt werden.

Die Idee von der großen Wirkung kleiner Ursachen geriet dann aber dann merkwürdiger-weise Vergessenheit, und es dauerte lange, bis die Physiker ihre Bedeutung erkannten.

Ein Grund ist, daß einige mathematische Methoden damals noch nicht zur Verfügung standen, was eine präzise Formulierung erschwerte. Gemeint sind theoretische Methoden (Maßtheorie, Ergodensatz), nicht fehlende Computer.

### 3.3. Boltzmann und der Pfeil der Zeit

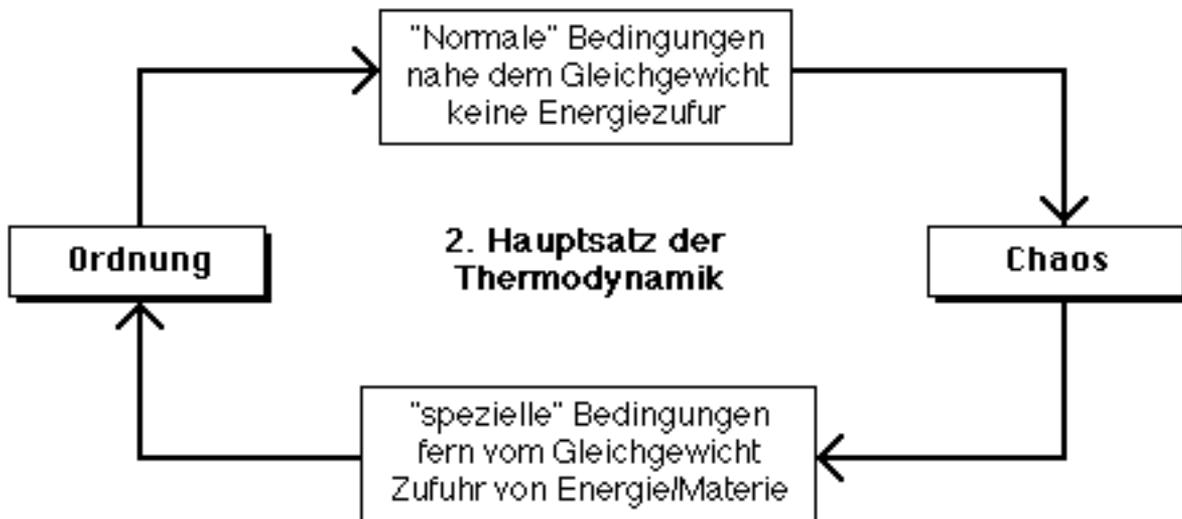
Eine weitere Korrektur des mechanistischen Weltbildes brachte das 19. Jahrhundert durch die Thermodynamik (Wärmelehre). Ludwig Boltzmann (1844 - 1906) schuf den Begriff der Entropie, der ein Maß für die Unordnung ist. Unter "normalen Bedingungen" kann die Entropie immer nur zunehmen.



Beispiel:

Die Gasmoleküle verteilen sich gleichmäßig, wenn die Trennwand geöffnet wird. Dabei nimmt die Entropie zu. Der wahrscheinlichste Zustand ist der, bei dem beide Kammern gleich viele Teilchen enthalten. Zwar ist es denkbar, aber höchst unwahrscheinlich, daß sich alle Teilchen wieder in einer Kammer sammeln

Vergangenheit und Zukunft sind nicht mehr gleichwertig. Es gibt Entwicklung ("Historizität"). Es gibt einen Pfeil der Zeit. Dies ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik:



Er stellt aber keinen Widerspruch zum Gedanken der Selbstorganisation und Strukturbildung dar; diese Phänomene sind aber nur möglich, wenn dem System von außen Energie oder Materie zugeführt werden. Unter diesen Bedingungen kann ein System mehr sein als die Summe seiner Teile.

Der *Entwicklungsgedanke* war bereits im 18. Jahrhundert entstanden; d.h. eine höhere Organisationsform ist nicht das fertige Resultat eines einmaligen transzendenten Schöpfungsaktes, sondern sie entsteht aus dem System selbst.

Kant entwickelt 1755 in seiner "Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels" Vorstellungen zur Selbstorganisation des Planetensystems.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war damit vom mechanistischen Naturbild nicht mehr viel übrig; viele Ideen, die oft der Chaosforschung zugeschrieben werden, waren schon existent.

### 3.4. Lorenz und der Schmetterlingseffekt

Den letzten Anstoß zur heutigen Chaostheorie gab der amerikanische Meteorologe Edward Lorenz. Er entdeckte die Poincarésche Idee von der großen Wirkung kleiner Ursachen wieder.

Lorenz beschäftigte sich mit einem mathematischen Modell des Wetters. Hierzu führte er 1963 numerische Berechnungen mit einer elektronischen Rechenanlagen aus, wie sie es seit dem Ende der 50er Jahre gab.

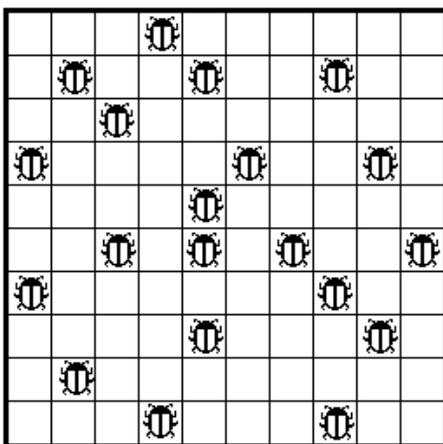
Da die Berechnungen sehr langwierig waren, unterbrach er sie eines abends; am nächsten Morgen gab er gerundete Zwischenergebnisse neu ein und setzte die Berechnungen fort. Es zeigten sich bald völlig andere Ergebnisse als bei einer Vergleichsrechnung ohne Unterbrechung. Er glaubte zunächst an einen Hardwarefehler seines noch unzuverlässigen Röhren-Computers. Genauere Untersuchungen zeigten dann, daß die winzigste Störung in der Atmosphäre ausreichte, um jede Langzeitprognose des Wetters unmöglich machte.

Von Lorenz oder einem seiner Mitarbeiter stammt die berühmt gewordene Formulierung "Der Flügelschlag eines Schmetterlings am Amazonas kann einen Wirbelsturm in Florida auslösen", die man auch als Schmetterlingseffekt bezeichnet.

Es dauerte nochmals fast 10 Jahre, bis die Lorenzschen Ergebnisse bekannt und - auch in der Physik - wissenschaftlich anerkannt wurden.

## 4. Das logistische Populationsmodell

Wir kommen nun zum Standardbeispiel der Chaostheorie: dem logistischen Populationsmodell. Es geht auf den belgischen Mathematiker Verhulst aus dem Jahre 1845 zurück. Wir veranschaulichen die zugrunde liegende Gleichung dadurch, wie sich z.B. eine Insektenpopulation im Laufe der Zeit zahlenmäßig entwickelt.



Das Modell geht von folgenden Annahmen aus:

1. der Population steht ein *begrenzter Lebensraum* zur Verfügung.

Sind alle Plätze besetzt, beträgt die Populationsgröße  $p=100\%$  oder  $p=1$ . Im Bild sind zu Beginn 20 % aller Plätze besetzt, also  $p=0,2$

2. Die Wachstumsrate ist nicht konstant, sondern vermindert sich entsprechend der noch verfügbaren Anzahl der Plätze

Nach der Iterations-Vorschrift des logistischen Modells erhält man die Größe der nächsten Generation, indem die Größe der vorigen Generation mit einem Faktor  $c \cdot (1-p)$  multipliziert wird:

$p$	$c * (1-p) * p$
oder	
$p$	$c * p - c * p^2$

Wegen des auftretenden Quadrates (Exponent 2) spricht man auch vom "quadratischer Iterator"; sein Funktionsschaubild ist eine Parabel.

Beispiel:

Es sei  $c=2$ , und wir beginnen mit einer Population der Größe  $p=0,2=20\%$ ; dann sind für die nächste Generation noch 80 % aller Plätze verfügbar, und für den Multiplikator gilt  $c*(1-p) = 2*(1-0,2) = 2*0,8 = 1,6$ . Die nächste Generation bekommt dann die Größe

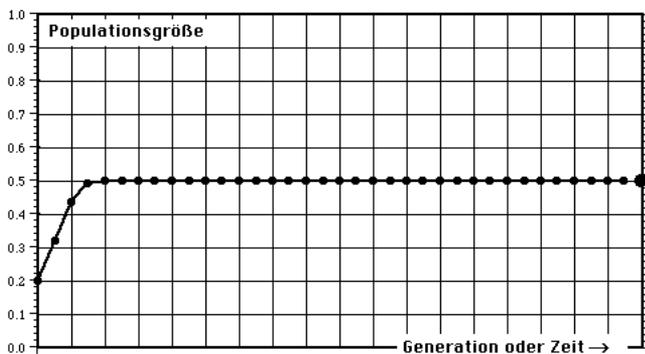
$$0,2 \quad 1,6 * 0,2 \quad = \quad 0,32$$

Der Multiplikator für die folgende Generation sinkt jetzt auf  $2 * (1 - 0,32) = 2 * 0,68 = 1,36$

$$0,32 \quad 1,36 * 0,32 \quad = \quad 0,4352$$

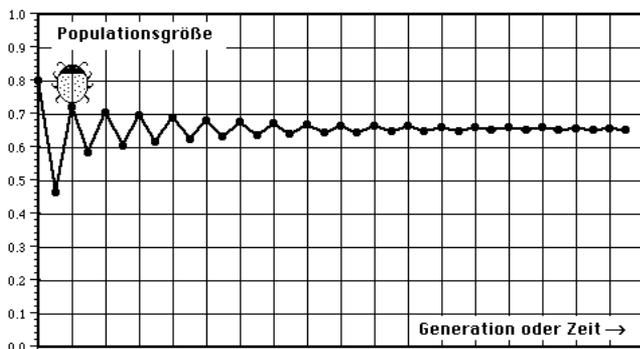
$$0,4352 \quad 1,1296 * 0,4352 = \quad 0,4916 \quad \text{usw.}$$

#### 4.1. Zeitreihen

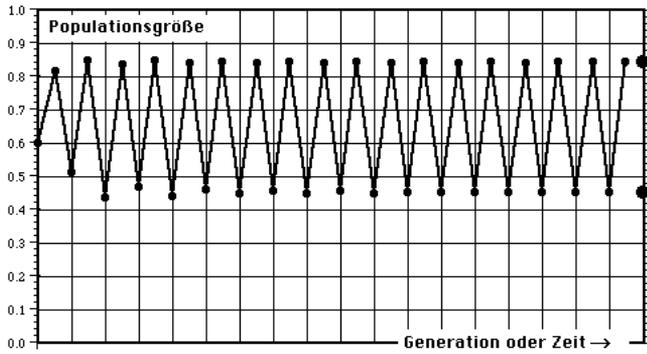


Wir tragen nun die berechneten Populationsgrößen  $p$  für aufeinanderfolgende Generationen in einem Koordinatensystem auf: ein solches Diagramm heißt Zeitreihe; sie zeigt in unserem Beispiel, daß ein konstanter Grenzwert von  $p=0,5=50\%$  erreicht wird. Die Populationsgröße ändert sich dann nicht mehr.

Bei allen anderen Anfangswerten entwickelt sich die Populationsgröße zu demselben Grenzwert von  $p=0,5$ . Das System verhält sich völlig stabil.



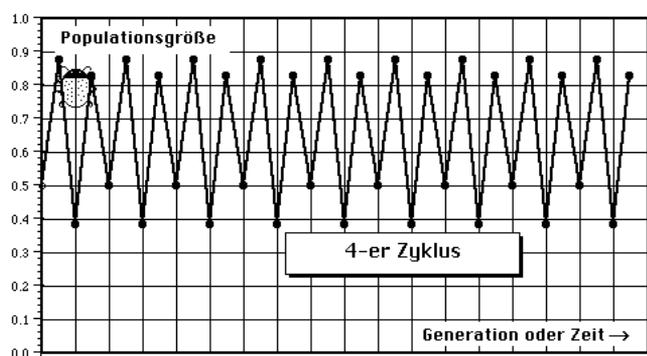
Für den Wachstumsfaktor  $c=2,9$  beobachtet man ein etwas anderes Verhalten: die Populationsgröße schwankt zunächst, nähert sich aber später ebenfalls einem Grenzwert.



Wählen wir nun eine andere Insektenart mit dem Wachstumsfaktor  $c=3.4$ . Man beobachtet ein neuartiges Verhalten.

Die Zeitreihe weist jetzt einen 2-er-Zyklus auf, d.h. einer Generation der Populationsgröße 0.85 folgt eine kleinere mit 0.45.

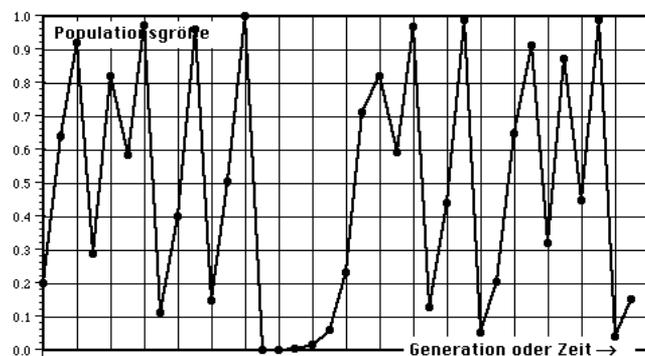
Entsprechende Beobachtungen sind aus der Biologie und Medizin bekannt: bestimmte Insekten treten periodisch auf, Malaria tritt in Schüben auf



$c=3.5$ :

Die Zeitreihe weist jetzt einen 4-er-Zyklus auf, die Werte wiederholen sich nach jeweils 4 Iterationen.

Wir betrachten nun eine Bakterienart mit dem Wachstumsfaktor  $c=4$ ; sie verhält sich gänzlich anders: die Populationsgröße schwankt in völlig unregelmäßiger Weise, es gibt weder einen noch mehrere Grenzwerte



#### 4.2. Sensitivität

Ungleichmäßiges Verhalten allein macht noch kein Chaos aus. Um eine wesentliche Eigenschaft von Chaos zu verstehen, untersuchen wir logistische Gleichung für  $c=4$  näher. Die Untersuchung besteht darin, daß wir die numerischen Ergebnisse der Rechnung und deren Genauigkeit analysieren:

Wir führen die Rechnungen für den Anfangswert  $x_0=0,40000000$  aus (mit 7 Nullen) und vergleichen mit der Rechnung für den Anfangswert  $x_0=0,40000001$ , der in der 8. Stelle hinter dem Komma eine 1 aufweist, weil wir uns um einen Käfer (auf 40.000.000) verzählt haben. Die Differenzen sind zunächst nur ganz gering

$$\text{Iteration } x_{n+1} = 4 \cdot (1 - x_n) \cdot x_n$$

i	$x_i$	$x_i^*$	Differenz $x_i - x_i^*$
0	0.40000000	0.40000001	-0.00000001
1	0.96000000	0.96000001	-0.00000001
2	0.15360000	0.15359997	0.00000003
3	0.52002816	0.52002808	0.00000008
4	0.99839549	0.99839550	-0.00000001
5	0.00640774	0.00640769	0.00000005
6	0.02546671	0.02546651	0.00000021
7	0.09927264	0.09927186	0.00000078
8	0.35767032	0.35766782	0.00000250
9	0.91896905	0.91896620	0.00000285
19	0.07062109	0.07338737	-0.00276629
20	0.26253499	0.27200666	-0.00947167
21	0.77444148	0.79207615	-0.01763467
22	0.69872750	0.65876608	0.03996142
23	0.84202953	0.89917333	-0.05714380
24	0.53206321	0.36264262	0.16942059
25	0.99588780	0.92453181	0.07135600
26	0.01638115	0.27909099	-0.26270983
27	0.06445125	0.80479683	-0.74034558
28	0.24118914	0.62839557	-0.38720643

Etwa von der 24. Iteration an sind die Ergebnisse sehr verschieden und die Differenzen werden so groß wie die Werte selbst

Eine kleine Änderung des Anfangswertes führt also zu völlig anderen Ergebnissen. In der Praxis ist aber der Anfangswert immer mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Die Berechnungen sind also von der 24. Iteration an unbrauchbar, und die Populationsgröße völlig unklar.

Handelt es sich bei dem Wachstumsvorgang um eine Zellteilung, die unter günstigen Bedingungen alle 20 Minuten erfolgt, tritt dieser Fall schon nach 8 Stunden ein.

Der Grund für die Unzuverlässigkeit der Vorausberechnung lag in den - wenn auch nur geringfügig - verschiedenen Anfangswerten der Rechnung. Die Abweichung müsste verschwinden, wenn man den Anfangswert mit größerer Genauigkeit eingibt. Also führen wir den Vergleich der Rechnungen erneut aus für  $x_0=0.4000000000000000$  (15 Nullen) und  $x_0=0.4000000000000001$ ; die Abweichung liegt jetzt in der 16. Stelle hinter dem Komma und ist 100 Millionen mal kleiner als zuvor.

i	$x_i$	$x_i^*$	Differenz $x_i - x_i^*$
0	0.4000000000000000	0.4000000000000001	-0.0000000000000001
1	0.9600000000000000	0.9600000000000001	-0.0000000000000001
2	0.1536000000000001	0.1535999999999997	0.0000000000000004
3	0.5200281600000003	0.5200281599999992	0.0000000000000011
4	0.9983954912280576	0.9983954912280577	-0.0000000000000001
5	0.0064077372941727	0.0064077372941722	0.0000000000000004
6	0.0254667127877661	0.0254667127877643	0.0000000000000018
7	0.0992726373102061	0.0992726373101994	0.0000000000000067
8	0.3576703231667295	0.3576703231667081	0.0000000000000214
20	0.2625349915555994	0.2625349916363239	-0.000000000807245

21	0.7744414790580030	0.7744414792113569	-0.0000000001533539
22	0.6987274982898228	0.6987274979531295	0.0000000003366933
23	0.8420295256938739	0.8420295262291556	-0.0000000005352817
24	0.5320632142144947	0.5320632127498374	0.0000000014646573
25	0.9958878011769418	0.9958878015526347	-0.0000000003756929
26	0.0163811545755915	0.0163811530851792	0.0000000014904123
27	0.0644512494014484	0.0644512436351166	0.0000000057663318
46	0.8658758519608672	0.8700436929179709	-0.0041678409571037
47	0.4645394438076382	0.4522706613265218	0.0122687824811164
48	0.9949701958181134	0.9908876409191697	0.0040825548989437
49	0.0200180210071139	0.0361172959712492	-0.0160992749641354
50	0.0784691993682904	0.1392513476118977	-0.0607821482436073
51	0.2892471364751596	0.4794416392006725	-0.1901945027255129
52	0.8223329220643201	0.9983094152049787	-0.1759764931406587
53	0.5844059494139079	0.0067509068722884	0.5776550425416195
54	0.9715025428141473	0.0268213285147605	0.9446812142993868

Die Ergebnisse für die 25. Generation stimmen noch gut überein (in 9 Nachkommastellen), drastische Abweichungen treten jetzt ab etwa der 50. Generation auf, und machen wiederum die weitere Vorausberechnung wertlos.

Im chaotischen Bereich des quadratischen Iterators gilt also

### 1. Der Fehler wächst ins Unendliche

er wächst bei jedem Schritt durchschnittlich um das Doppelte, und es ist nur eine Frage der Zeit, bis er so groß ist wie das Ergebnis selbst. Die geringste Abweichung verstärkt sich.

### 2. Der Rechenaufwand für eine bestimmte Genauigkeit wächst ins Unendliche.

Man nennt diesen Effekt empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen oder "Sensitivität".

*Das Chaos macht jeden noch so großen Computer nieder!*

Die Sensitivität macht jede Langzeit-Vorhersage unmöglich, obwohl das Gesetz, nach der die Entwicklung fortschreitet, exakt bekannt ist! Die Unmöglichkeit der Langzeitprognose beruht also nicht auf unzureichender Kenntnis des Systems. Man spricht daher von einem "deterministischen Chaos".

Beobachtet man beim Doppelpendel die Bewegungen der kleinen Pendelstange, so ist die Drehrichtung aufeinanderfolgender Überschläge "chaotisch", wenn das Experiment - auch bei "exakt gleicher" Ausgangslage - wiederholt wird.

Wenn die vom Computer gelieferten Langzeitberechnungen wertlos sind, liegt der Verdacht nahe, Chaos sei nur ein Artefakt aus dem Computer, also ein Kunstprodukt, das seinen Grund in der Unzulänglichkeit des Computers hat und mit der Realität nichts gemein hat. Zu dieser Enthüllung neigt auch "Der Spiegel" (Sept./Okt. 1993). Verfasser Peter Brügge schreibt:

"Fazit: Ein unbekannt großer Anteil dessen, was bei der für revolutionär erklärten Betrachtung nichtlinearer Prozesse in der Natur, der Gesellschaft, der Ökonomie nach Chaos aussieht, ist vor allem ein Erzeugnis der Numerik - Computerchaos. ... Das Hilfsmittel, ohne das dem deterministischen Chaos gar nicht auf die Spur zu kommen war, erzeugt das gesuchte selber!"

Der Autor stellt also die Existenz des Phänomens Chaos allgemein in Frage; er ignoriert oder verschweigt hundert Jahre computerfreier, strikter und unbestrittener Mathematik, die den

wahren Kern dieser Wissenschaft bildet. Das naturwissenschaftliche Phänomen Chaos ist mathematisch wohldefiniert (in der Ergodentheorie), völlig unabhängig von irgendwelchen Computerrechnungen. Der Computer hilft lediglich, einige Dinge besser zu veranschaulichen. Wer das Gegenteil behauptet will, muß der Mathematik einen Fehler nachweisen.

Den destruktiven Konsequenzen der Chaostheorie stehen aber auch konstruktive Konsequenzen gegenüber; sie bestehen darin, daß im Chaos neue Gesetzmäßigkeiten existieren.

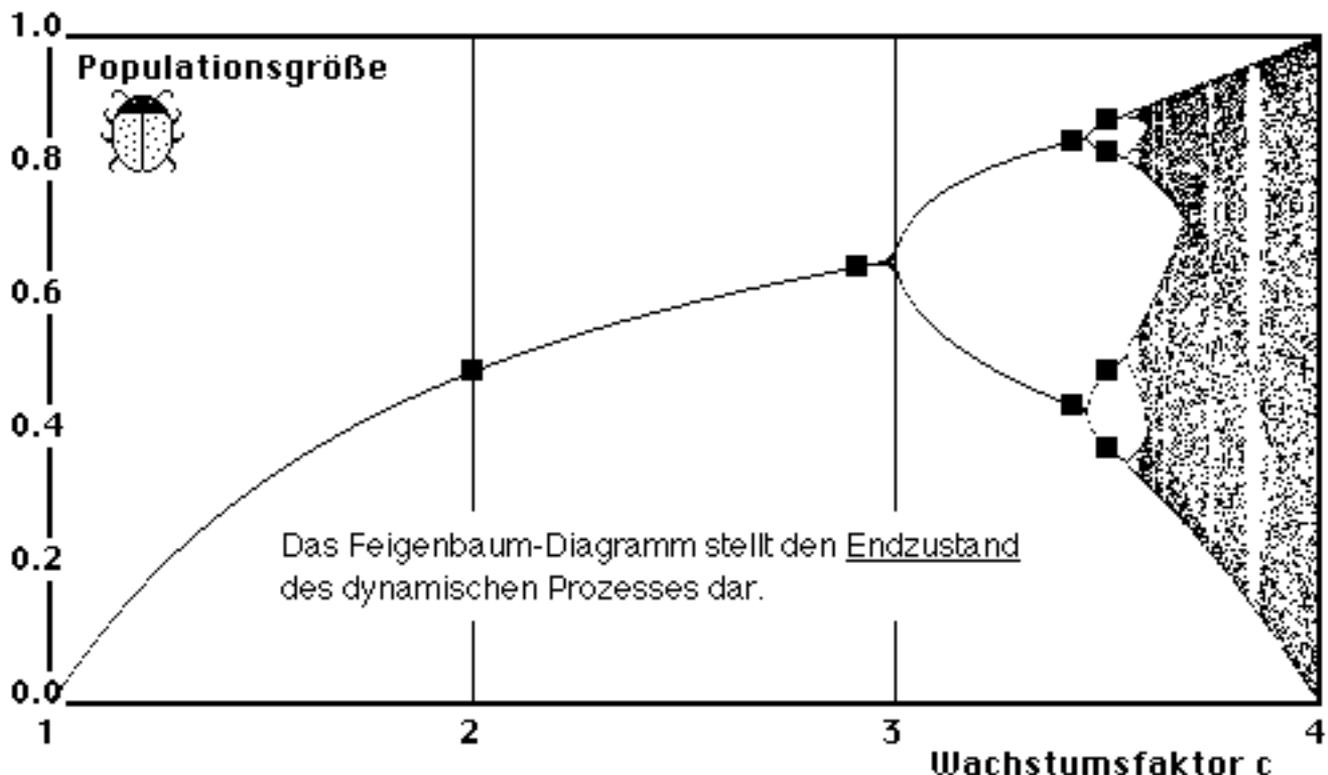
### 4.3. Das Feigenbaum-Diagramm

Wir haben bisher das Verhalten der Population durch Zeitdiagramme beschrieben, in denen die zeitliche Entwicklung der Populationsgröße aufgetragen war. Zu jedem Wert der Wachstumsrate  $c$  gehört ein eigenes Zeitdiagramm. Wir wählen nun eine andere Art der Darstellung, die alle Zeitdiagramme in einem zusammenfaßt, das sog. Feigenbaum-Diagramm. Auf der waagerechten Achse ist jetzt statt der Zeit oder Generation die Wachstumsrate  $c$  aufgetragen. Die senkrechte Achse zeigt wie bisher die Populationsgröße, die sich nach genügend langer Zeit als Grenzwert einstellt, also die Populationsgröße des Endzustandes. An Information geht in diesem Diagramm verloren, wie lange das Erreichen des Endzustandes dauert.

Folgende Zeitreihen haben wir betrachtet:

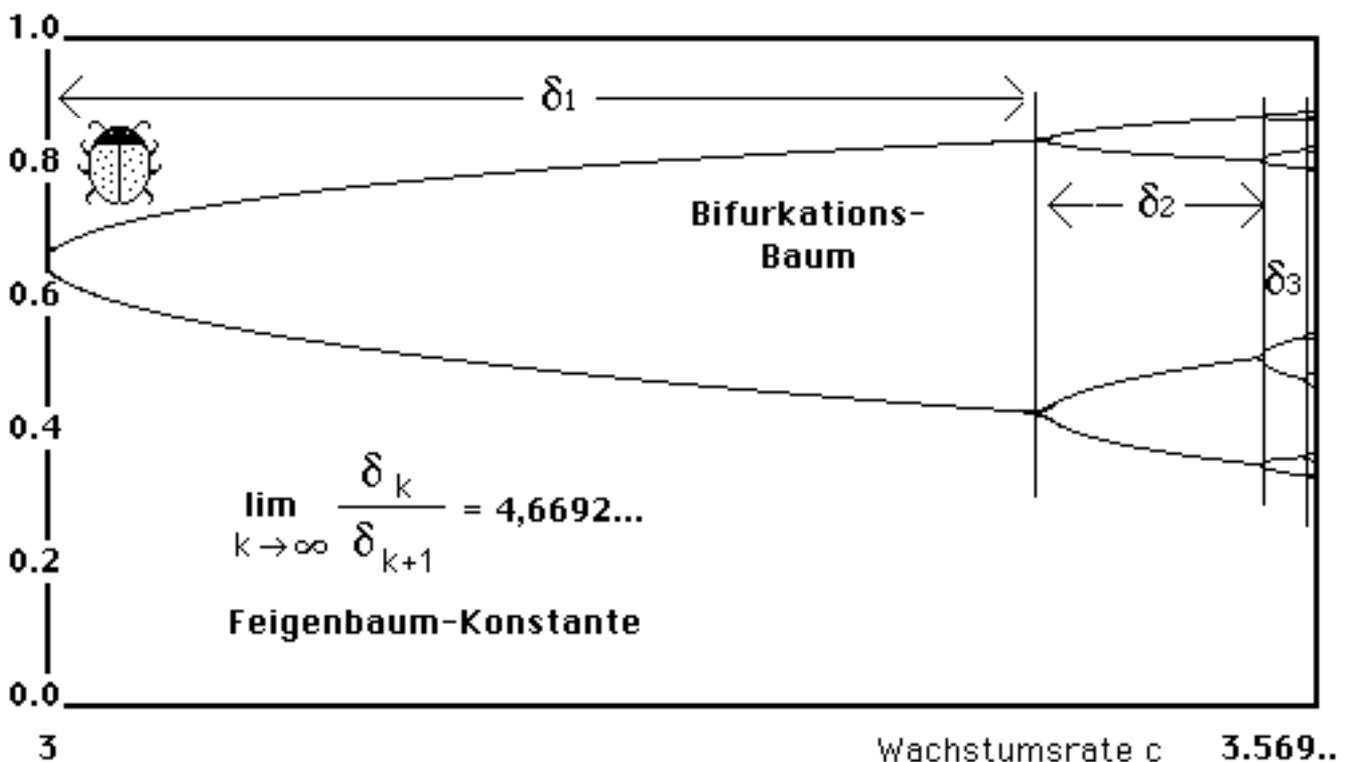
- Wachstumsraten  $c=2$  und  $c=2,9$ : die Populationsgröße im Endzustand einen konstanten Grenzwert (stabile Ordnung);
- Wachstumsraten  $c=3,4$  und  $c=3,5$ : die Größe wechselt periodisch (2-er Zyklus bzw. 4-er Zyklus, periodische Ordnung);
- Wachstumsrate  $c=4$ : das Verhalten ist chaotisch, alle Größen zwischen 0 und 1 treten auf.

Trägt man nun die Endzustände für alle möglichen Wachstumsraten  $c$  ein, so erhält man das folgende Diagramm



Folgende Bereiche sind zu erkennen:

- Bei allen Wachstumsfaktoren zwischen 1 und 3 gibt es nur einen Grenzwert für die Populationsgröße; sie ist im Endzustand stabil, es herrscht absolute Ordnung;
- Bei  $c=3$  tritt eine Verzweigung (Bifurkation) auf; in einem 2-er-Zyklus schwankt die Populationsgröße von einer Generation zur nächsten periodisch.
- Dann tritt eine weitere Verzweigung (Periodenverdopplungen) auf; aus dem 2-er-Zyklus wird ein 4-er-Zyklus, ein 8-er-Zyklus usw..
- Noch weitere Verzweigungen rücken dann immer näher zusammen (Bifurkationskaskade) bis  $a=3,57$ ;
- Bei  $a=3,57$  tritt erstmals Chaos auf, hier endet der Bereich, in dem Langzeitberechnungen möglich sind.
- Der chaotische Bereich wird durch Inseln der Ordnung unterbrochen, in denen regelmäßige Zyklen vorkommen (Intermittenz)



Das Feigenbaum-Diagramm weist einige bemerkenswerte Eigenschaften auf:

- Es ist ein Fraktal: die Verzweigungen wiederholen sich immer wieder;
- der Bifurkationsbaum ist selbstähnlich;
- Die Struktur der Verzweigungen hat eine Gesetzmäßigkeit: das Verhältnis der Abstände aufeinanderfolgender Verzweigungspunkte konvergiert gegen eine feste Zahl, nämlich 4,6692..... Der Physiker Siegfried Grossmann fand sie 1977 für die logistische Gleichung; 1978 fand Feigenbaum sie auch für viele andere nichtlineare Gleichungen. Die Feigenbaum-Zahl ist also eine universelle Konstante und hat für die Chaosforschung eine ebenso fundamentale Bedeutung wie die Kreiszahl  $\pi$  in der Geometrie oder die Eulersche Zahl  $e$ . Sie tritt auf bei Flüssigkeitsströmungen, beim Laser, in der Elektronik.
- Der Übergang von Ordnung zum Chaos erfolgt nach einer Phase von Periodenverdopplungen. Der Weg ins Chaos ist durch das Szenario der Periodenverdopplungen charakterisiert.

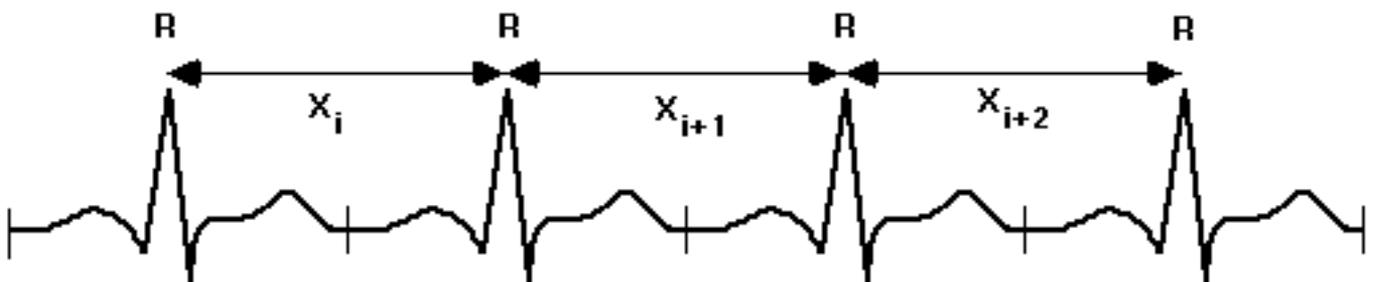
## 5. Beispiele für Chaos und Ordnung

### 5.1. Kardiologie

Bei diesem Beispiel aus der Medizin geht es um das Problem des "plötzlichen Herztodes", an dem in Deutschland jedes Jahr rund 100.000 Menschen sterben, sowohl Patienten mit bekannter Herzkrankheit als auch (vermeintlich) völlig gesunde Menschen.

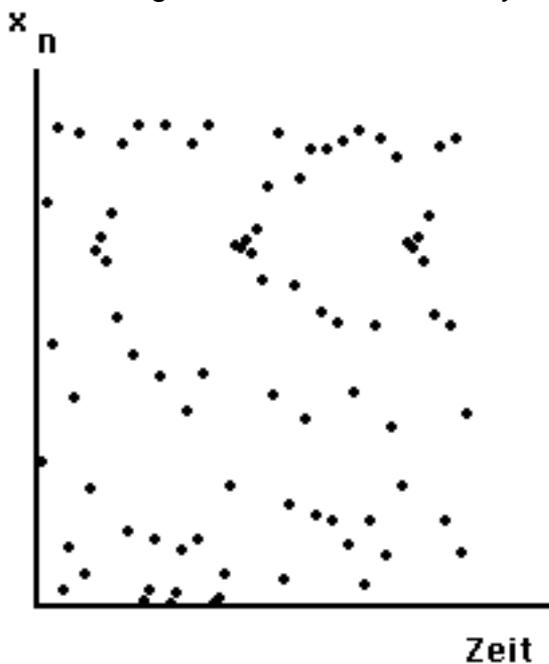
1991 wurde in München das *Zentrum für nichtlineare Dynamik in der Kardiologie* gegründet; die Arbeitsgruppe besteht aus Kardiologen und Astrophysikern (!) mit dem Ziel, das komplexe System Herz besser zu verstehen und zuverlässigere Indikatoren für eine Gefährdung zu bekommen.

Grundlage der Untersuchungen sind Langzeit-Elektrokardiogramme (EKG). Die Extremitäten-Ableitungen weisen die markante R-Zacke auf:

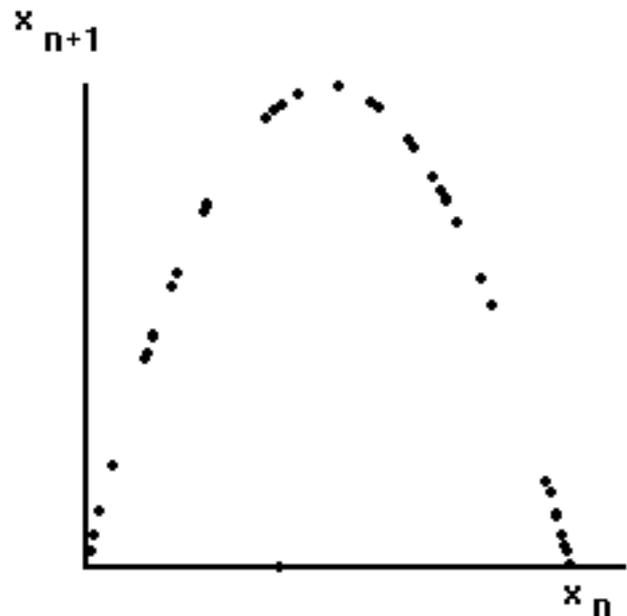


Es wurde nun die zeitliche Länge der RR-Intervalle für 100.000 aufeinanderfolgende Herzschläge gemessen. Die Länge dieser Zeitintervalle  $x_i$  hängt von der Belastung ab, weist aber auch chaotische Schwankungen auf.

Man unterzog die Werte  $x_i$  einer Analyse, die für den quadratischen Iterator so aussieht:



Auftragung als Zeitreihe



Auftragung im Phasendiagramm

Die Auftragung der Iterationswerte  $x_i$  gegen die Zeit (links) zeigt ein chaotisches Bild. Im rechten Bild sind dieselben Werte eingetragen, jedoch auf den Achsen aufeinanderfolgende Werte ( $x_n$  und  $x_{n+1}$ ). Aus dem chaotischen Bild der zeitlichen Auftragung wird im Phasendiagramm (rechts) ein wohlgeordnete Struktur, die Parabel des quadratischen Iterators.

Bei der EKG-Auswertung sind nun *drei* aufeinanderfolgende Zeitintervalle als Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Koordinatensystem aufgetragen.

- Mitte: Für einen *gesunden* Probanden konzentriert sich die Punktverteilung um die Raumdiagonale herum; hohe Belastung (= schnelle Schlagabfolge, kleine RR-Intervalle) liegt im unteren, engen Teil der Keule nahe dem Nullpunkt des Koordinatensystems, die Ruhephase liegt im oberen, breiten Teil.
- links und rechts: *koronar Herzkrankte* : der Bereich der normalen Schlagabfolge ist deutlich verkleinert; es gibt sog. Extrasystolen, die einen ausgedehnten Raum ein; der rechte Patient *verstarb* einige Wochen nach der Aufnahme *plötzlich* :

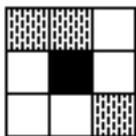
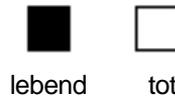
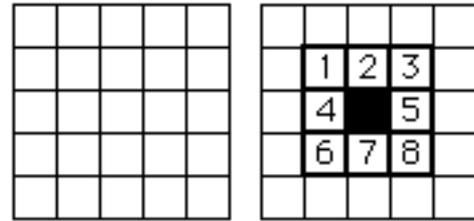
Dieses Beispiel zeigt vielleicht, wie Methoden der "Chaosforschung" vielleicht künftig die medizinische Diagnose verbessern können

## 5.2. Zelluläre Automaten

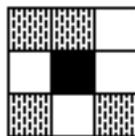
Das Game of Life, das der amerikanische Mathematiker John Conway 1970 erfunden hat, ist ein Beispiel für einen "zellulären Automaten".

Ein *zellulärer Automat* ist definiert :

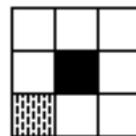
1. durch eine Anordnung von Zellen (z.B. ebenes Quadratgitter)
2. durch die Zustände, die eine Zelle haben kann (z.B. lebend / tot)
3. durch die Nachbarschaft, die zu einer Zelle gehört (z.B. 8 Nachbarzellen)
4. durch Regeln, nach denen die Nachbarschaft einer Zelle ihren eigenen Zustand in der nächsten Generation bestimmt:



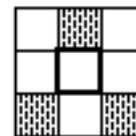
eine Zelle mit 2  
oder 3 Nachbarn  
überlebt



eine Zelle mit  
4 oder mehr  
Nachbarn stirbt an  
Überbevölkerung

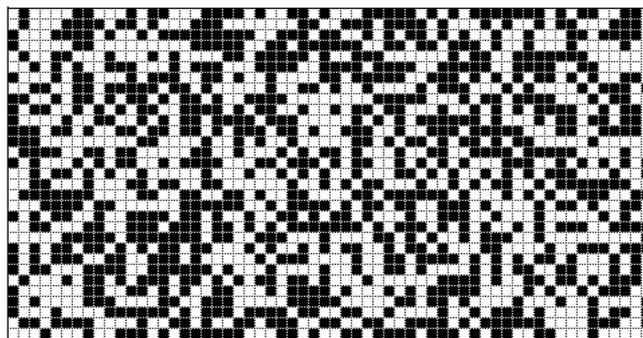


eine Zelle mit 1  
oder 0 Nachbarn  
stirbt an Isolation

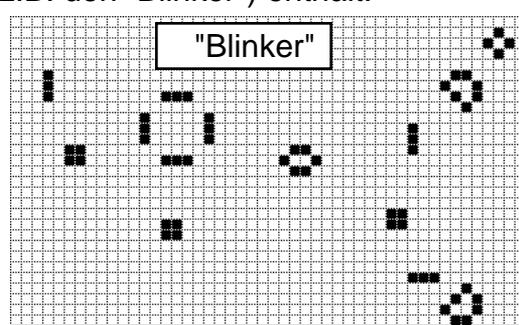
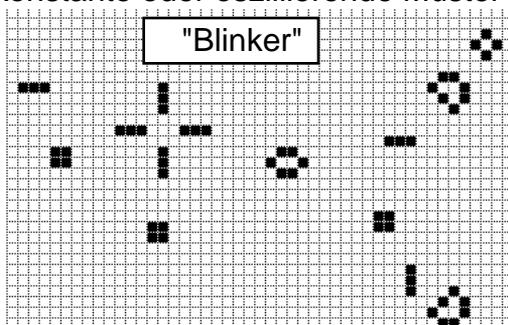


in einer leeren Zelle  
mit 3 Nachbarn  
entsteht Leben

Wir füllen den Automaten mit einer chaotischen Ursuppe mit 50 % lebenden Zellen



Manchmal ist das Spiel schnell zu Ende, weil alle Zellen sterben. Meistens entsteht nach genügend langer Zeit (z.B. 762 Generationen) aus dem anfänglichen Chaos ein geordnetes Bild, das konstante oder oszillierende Muster (z.B. den "Blinker") enthält.



Daneben gibt es eine Reihe von interessanteren Strukturen wie die Gleiter-Kanone, die fortlaufend "Gleiter" aussendet.

Das Game of Life kann als Evolutionsmodell aufgefaßt werden, daß trotz seiner Einfachheit interessante Bezüge zur Realität ausweist: z.B. führen unter der enorm großen Zahl möglicher Regeln nur solche zu geordneten Mustern, die *irreversibel* sind (d.h. es gibt Zustände, die aus mehr als einem Vorgängerzustand hervorgehen können).

Wenn die Regeln des zelluläre Automaten Konkurrenz- oder Konfliktsituationen modellieren, können Modelle der Verhaltensbiologie simuliert werden. Hier ergeben sich Bezüge zur Spieltheorie, die nach Vorarbeiten von Zermelo und Borel hauptsächlich durch von Neumann entwickelt (1928) und auch auf ökonomische Probleme angewendet wurde (1961).

Wir denken uns alle Zellen durch "Individuen" besetzt, die entweder die Eigenschaft "schwarz" oder "weiß" besitzen.

Jede Zelle übernimmt in der nächsten Generation den Zustand, den die *Mehrzahl* ihrer 8 nächsten Nachbarn hat. Im Anfangszustand sind je 50 % schwarzer und weißer Zellen zufällig verteilt.

Fall (1):

eine Zelle ändert ihren Zustand, wenn 6 oder mehr Nachbarn einen anderen Zustand haben.

Fall (2):

eine Zelle ändert ihren Zustand, wenn 5 oder mehr Nachbarn einen anderen Zustand haben.

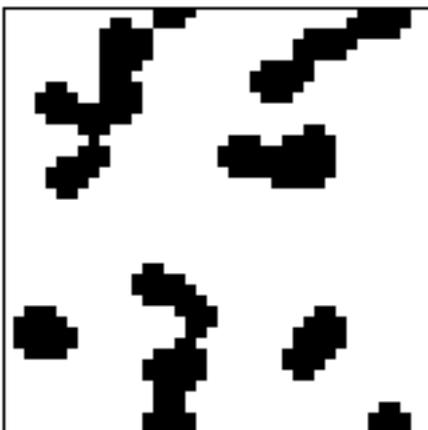


Anfangszustand

Endzustand Fall (1) nach 5 Gen.

Endzustand Fall (2) nach 20 Gen.

In beiden Fällen entsteht eine konstant bleibende Verteilung, in der sich größere Bereiche gleichartiger Zellen ausgebildet haben (Fernordnung, kollektives Phänomen), wobei die Gesamtzahlen schwarzer und weißer wegen der Symmetrie der Regeln unverändert bleiben. Im 2. Fall ist die Schwelle für eine Zustandsänderung niedriger; die gleichartigen Gebiete sind größer, kleinere Enklaven andersartiger haben aber noch Bestand.



Fall (3):

Für seine Zustandsänderung benötigt schwarz 5 oder mehr andersartige Nachbarn, weiß aber mindestens 6:

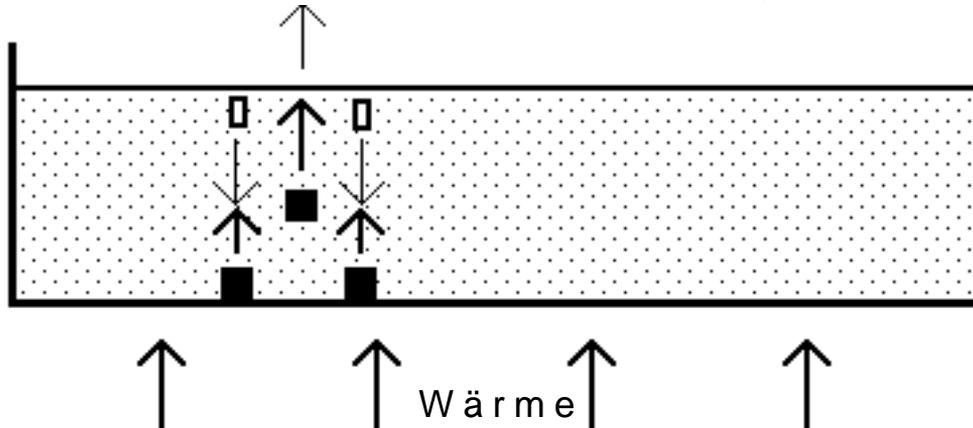
Diese Unsymmetrie führt im Endzustand zu einer Verschiebung des Verhältnisses von s : w: aus 50 : 50 wird etwa 20: 80 (Bild links).

Bei einer anfänglichen geringen Ungleichheit von 40 : 60 hängt es von Zufälligkeiten der Verteilung ab, ob wenige s überleben oder alle s völlig aussterben .

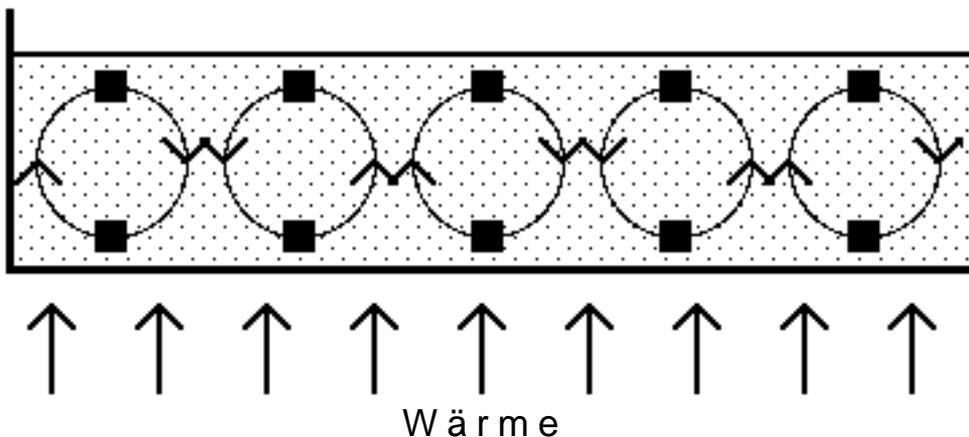
Man kann auch komplexere Spielsituationen untersuchen, bei denen verschiedene Strategien möglich sind (z.B. das Gefangenenen-Dilemma). Es zeigt sich dann, ob eine Strategie "evolutionär stabil" ist, d.h. erfolgreicher als eine leicht abgewandelte [s. Emmeche, Braitenberg]

### 5.3. Musterbildung in Flüssigkeiten

Man erwärmt eine Schale mit Öl von unten. Teile der Flüssigkeit steigen auf, geben ihre Wärme an der Oberfläche ab und sinken wieder nach unten. Bei starker Erwärmung behindern sich aufsteigende und absinkende Teile, wodurch der Wärmetransport gestört wird.

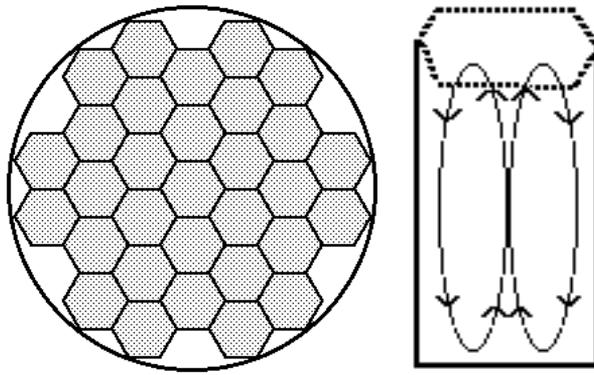


Die Flüssigkeit löst das Problem des optimalen Wärmetransports nun auf eine überraschende Weise:



es bilden sich Bereiche kollektiver und geordneter Bewegung in Form von Rollen, wobei benachbarte Rollen so rotieren, daß sich an der gemeinsamen Grenze eine gemeinsame Bewegungsrichtung ergibt (Bénard-Rollen).

Statt zylindrischer Rollen können auch sechseckige Zellen entstehen (Bénard-Zellen)



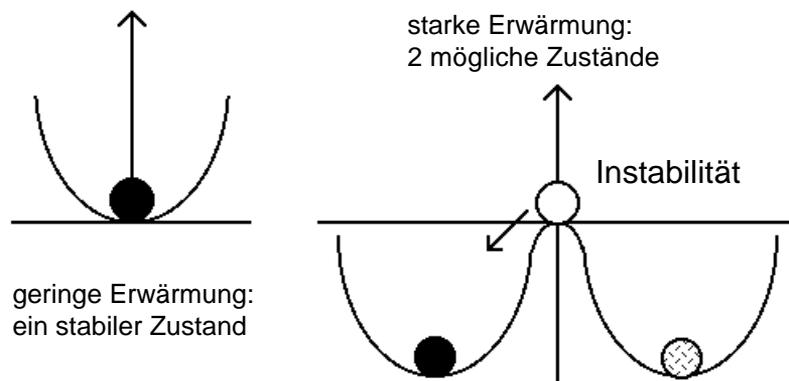
An der nordirischen Küste gibt es Gesteinsformationen, bei denen Zellen flüssiger Lava zu 5- oder 6-eckigen Säulen erstarrt sind.

Die Musterbildung in Flüssigkeiten ist ein Beispiel für Selbstorganisation: die einzelnen Teile eines Systems wirken so zusammen, daß auf makroskopischer Ebene neuartige Strukturen entstehen.

Welche der beiden möglichen Drehrichtungen eine Zelle annimmt, hängt von einer mikroskopisch kleinen Schwankung ab.

Das System ist vergleichbar mit einer Kugel in einer Gebirgslandschaft:

- bei geringer Erwärmung gibt es nur eine stabile Lage
- bei zunehmender Erwärmung durchläuft das System eine Instabilität und muß sich für *eine* von zwei Möglichkeiten entscheiden; eine mikroskopisch kleine und nicht vorausberechenbare Schwankung wächst zu einem makroskopisch wahrnehmbaren Unterschied. Trotz einer Gesetzmäßigkeit geschieht ein *einmaliges* Ereignis.



Ähnliche Situationen gibt es in der biologischen Evolution: eine zufällige Mutation, vielleicht ausgelöst durch ein Elementarteilchen der Höhenstrahlung, kann sich trotz der strengen Mendelschen Gesetze auf eine ganze Entwicklungslinie auswirken, und man könnte von einem historischen Ereignis sprechen.

Kipp-Bild: Vase / Gesichter

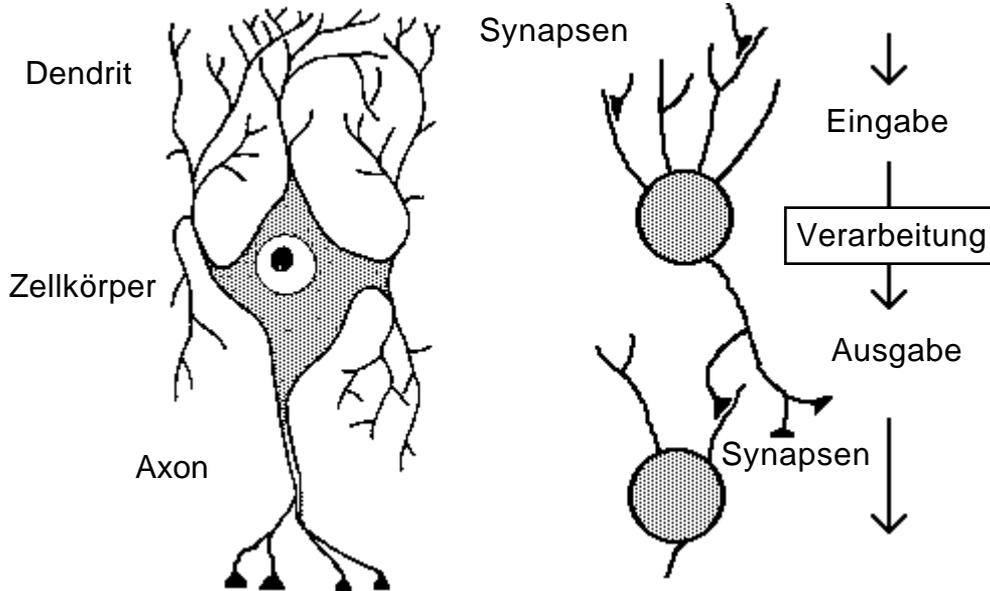
Bei der menschlichen Wahrnehmung können Zufälle (auch Voreingenommenheit) eine wesentliche Rolle spielen.

Ebenso sind manche Lernvorgänge einmalige Ereignisse, die den Menschen für spätere Zeiten festlegen.

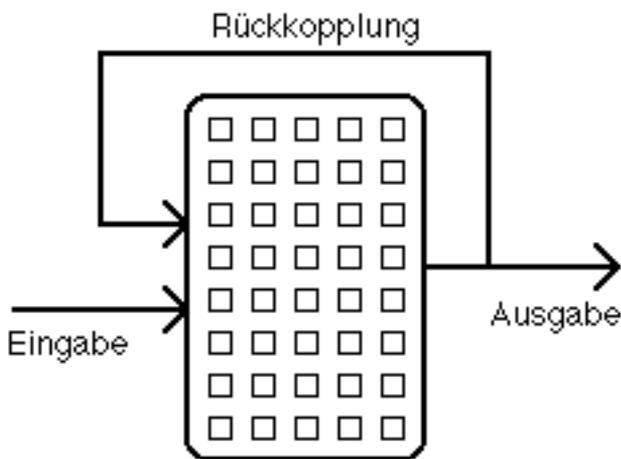
In Politik oder Gesellschaft können Entscheidungen Einzelner zu nicht umkehrbaren, d.h. historischen Prozessen führen können.

#### 5.4. Neuronale Netze

Das menschliche Gehirn besteht aus etwa 100 Milliarden Nervenzellen, Neurone genannt, die miteinander über Synapsen miteinander verschaltet sind. Sie empfangen elektrische Signale von über 1.000 Vorgängerzellen, verarbeiten (bewerten) diese und verteilen das Ergebnis als Signal an über 1.000 nachfolgende Zellen; insgesamt gibt es also etwa 100 Billionen Synapsen in unserem Gehirn. Bei der Weitergabe der Signale über die Synapsen können diese verstärkend (erregend) oder abschwächend (hemmend) wirken.



Beispiel: Simulation eines neuronalen Netzes nach Hopfield:



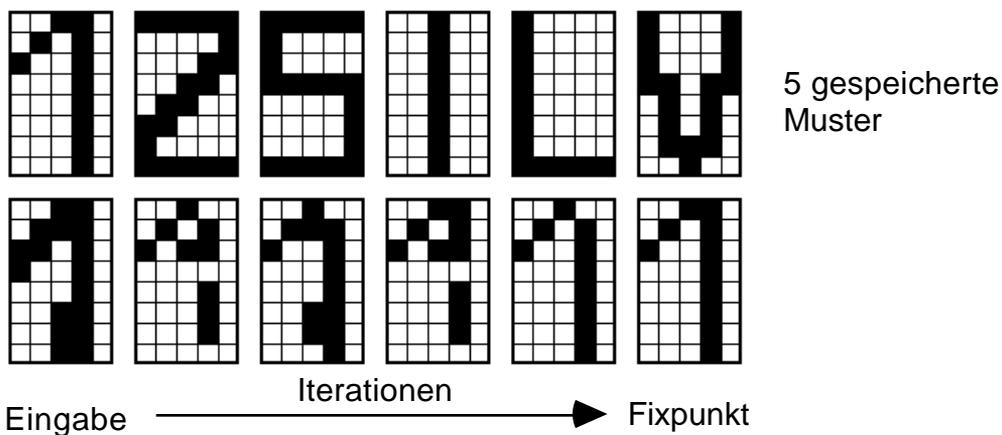
Hopfield-Netz (1982)

- jedes Neuron erhält eine Eingabe (schwarz oder weiß)
- jedes Neuron ist mit jedem durch Rückkopplung verknüpft (außer mit sich selbst)

Ein solches Netz mit  $5 * 8 = 40$  Neuronen kann ungefähr 5 Muster lernen und wiedererkennen.

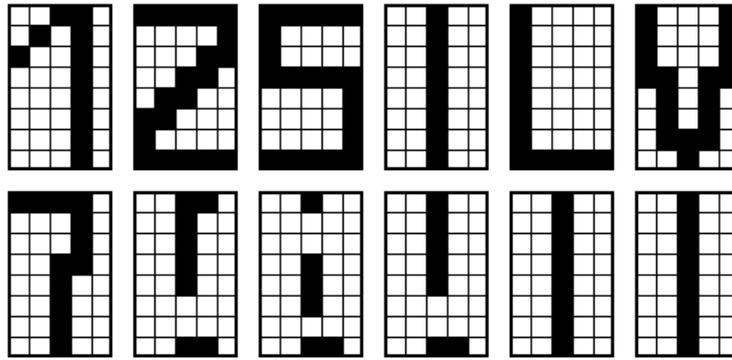
Wir geben jeweils eine gestörte Variationen des gespeicherten Musters "1" ein:

1. Fall:



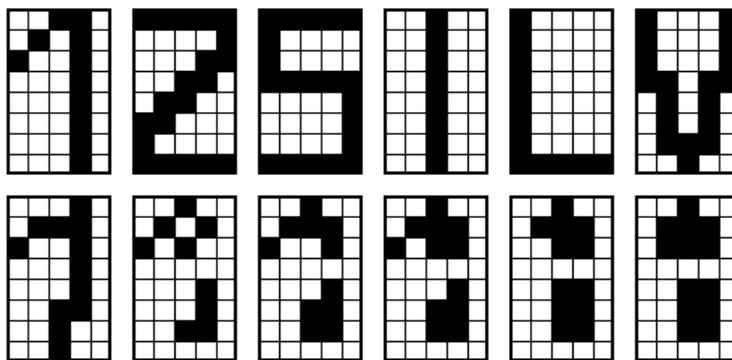
Die Iteration konvergiert gegen einen Fixpunkt, das Muster "1"; die Eingabe wird *richtig* erkannt.

2. Fall:



Die Iteration führt zu einem ähnlichen, aber anderen der gespeicherten Muster ("Verwechslung")

3. Fall:



Das eingegebene Bild ist zu stark gestört und wird *nicht* erkannt.

Die Wiedererkennung funktioniert umso besser, je weniger das eingegebene Bild gestört ist und je mehr sich die gelernten Muster voneinander unterscheiden.



Fixpunkt "1"



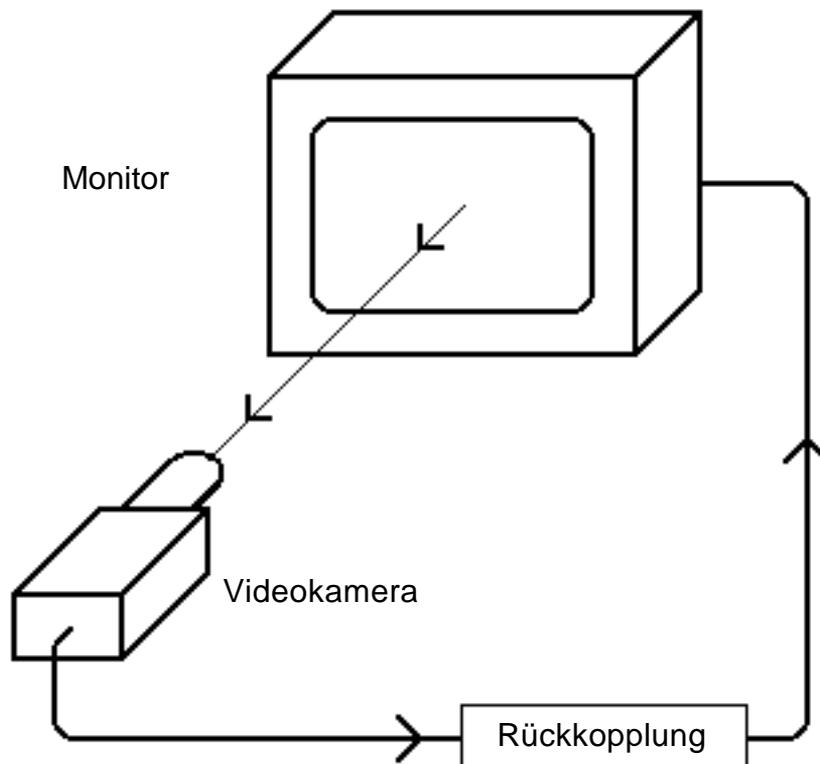
Fixpunkt "1"    Fixpunkt "1"

Das System ist vergleichbar mit einer Kugel, die in einer Gebirgslandschaft rollt: ihr Startpunkt entspricht dem Anfangsbild, und die Täler entsprechen Fixpunkten. Im 1. Fall liegt das Anfangsbild im Einzugsbereich des richtigen Fixpunktes; im 2. Fall wird ein anderer Fixpunkt erreicht.

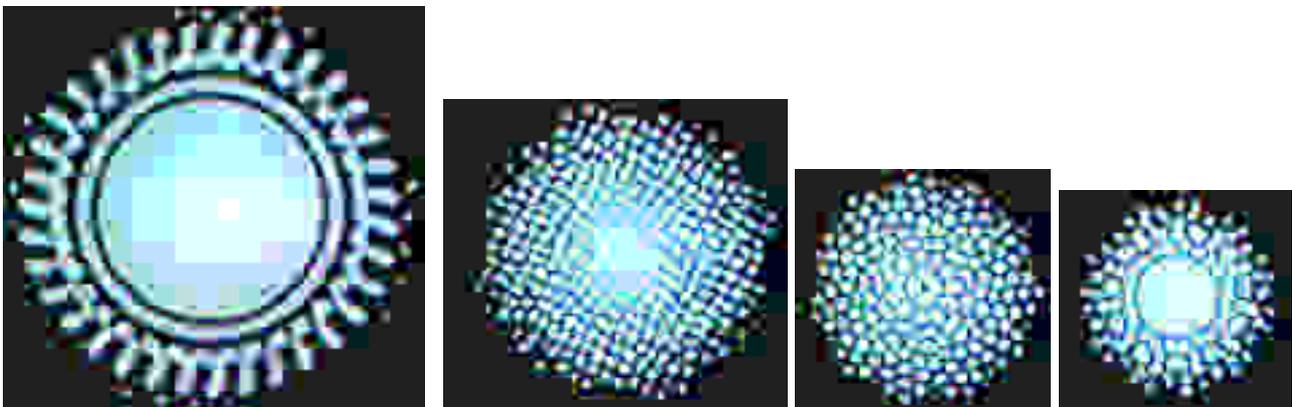
Ein neuronales Netz hat also die Fähigkeit, aus einer gestörten oder unvollständigen Information die ungestörte oder vollständige Information zu rekonstruieren; man bezeichnet es als assoziativen Speicher. Im Falle des menschlichen Gehirns spricht man von "assoziativem Gedächtnis".

Die praktische Anwendung künstlicher neuronaler Netze liegt z.B. in der Sprach- oder Bildverarbeitung; die umfangreichsten technischen Implementierungen zur Bildverarbeitung haben derzeit nur die Leistungsfähigkeit (bezüglich Speichergröße und Geschwindigkeit) einer Fliege.

Bei diesem Real-Experiment (Projektwoche) ist eine Videokamera auf ihren eigenen Monitor gerichtet; sie nimmt zunächst ein zufälliges Bild auf, zeigt es auf dem Monitor, nimmt es wiederum auf usw. Das Bild durchläuft also eine Rückkopplungsschleife.



Aus einem chaotischen Anfangsbild kann dabei wie bei neuronalen Netzen eine stationäre und wohlgeordnete Struktur entstehen. Eine Störung des Bildes, z. B. durch kurzes Verdecken der Kamera, heilt aus, und das stabile Muster bildet sich zurück.



Hinweise zum Experiment:

Videokamera drehen (auf die Seite legen, Nichtlinearität !); Farbe am Monitor zurückstellen; Zoom so einstellen, daß der Abbildungsmaßstab 1:1 beträgt; Rückkopplung durch einen Lichtblitz zwischen Kamera und Monitor zünden.

### 5.6. Selbstähnlichkeit bei Tönen

Bereits die Griechen hatten erkannt, daß die Halbierung einer Instrumentensaite ein Intervall ergibt, das als angenehm empfunden wird; physikalisch gesehen verdoppelt sich die Frequenz, die beiden Töne werden in ihrer Qualität als gleichwertig gehört. Wir sprechen heute von einer Oktave.

Es gibt interessante Bezüge zwischen Zahlentheorie und Tonintervallen (temperierte Stimmung, Quinten-Zirkel).

Ein Ton (Key-Bord-Synthesizer) ist mit der Bandgeschwindigkeit 9,5 cm/s aufgenommen. Verdoppelt man die Geschwindigkeit, wird der Ton genau eine Oktave höher und bei halber Geschwindigkeit um eine Oktave tiefer als der Ausgangston.

Entsprechendes gilt für die menschliche Stimme: bei halber Geschwindigkeit ähnelt die Stimme der eines Brummbärs, bei doppelter Geschwindigkeit der Donald Ducks.

In der nächsten Aufnahme ist so entstanden, daß mit einem Keyboard-Synthesizer die Note c gleichzeitig 6 mal erklingt ( $c_1$  bis  $c_6$ ), jeweils um eine Oktave versetzt.

Bei größerer und bei kleinerer Bandgeschwindigkeit ist jetzt kaum ein Unterschied zu hören. Eine (stufenweise) Änderung der Geschwindigkeit bleibt ohne Einfluß. Es gibt keinen bevorzugten Maßstab in der Zeit. Der zusammengesetzte Ton hat die Eigenschaft der zeitlichen Selbstähnlichkeit.

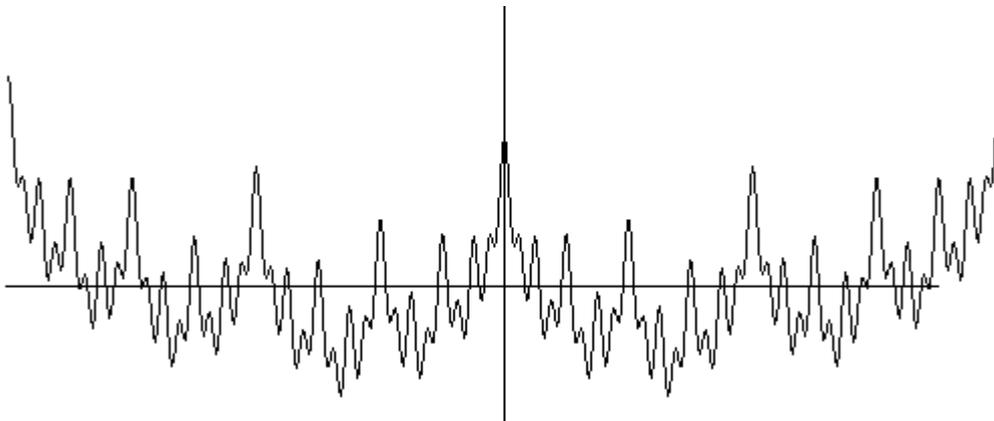
Die Erklärung dieses akustischen Paradoxons ist einfach. Bei Verdopplung der Geschwindigkeit verdoppeln sich alle Frequenzen; die erste Komponente verdoppelten Tons stimmt mit der 2. Komponente des ursprünglichen zusammen; dasselbe gilt für alle weiteren Komponenten des neuen Tons.

	<u>Frequenz</u>		<u>verdoppelt</u>
c1	<b>100</b>	→	<b>200.0</b>
c2	<b>200</b>	→	<b>400.0</b>
c3	<b>400</b>	→	<b>800.0</b>
c4	<b>800</b>	→	<b>1600.0</b>
c5	<b>1600</b>	→	<b>3200.0</b>
c6	<b>3200</b>	→	<b>6400.0</b>

Die 1. Komponente des neuen Klangs stimmt überein mit der 2. des ursprünglichen Klanges, usw.

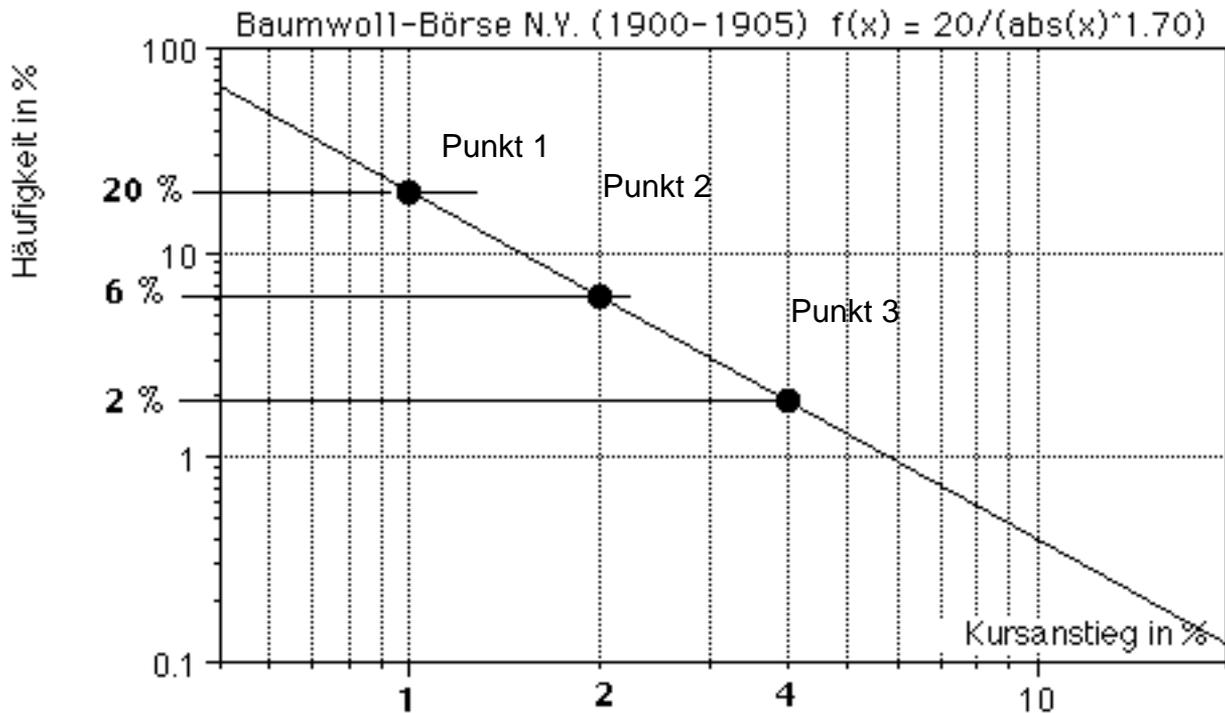
(Um die Illusion perfekt zu machen, müßte in den neuen Ton die tiefste Komponente  $c_1$  eingefügt werden, und der ursprüngliche Ton müßte den gesamten Hörbereich des Ohrs (max. 20.000 Hz) umfassen; dann fiel die letzte Komponente des neuen Tons, die keine Entsprechung im Original hat, als unhörbar heraus.)

Im Schwingungsbild des Tons ist wird die zeitliche Selbstähnlichkeit zu einer geometrischen:



## 5.7. Ökonomie

Ein berühmtes Beispiel für Selbstähnlichkeit stammt aus der Ökonomie: Mandelbrot untersuchte 1963 Preisfluktuationen an der Börse; für die New Yorker Baumwollbörse wertete er die täglichen Schlußnotierungen in den Jahren 1900 bis 1905 aus.. Das Verhältnis von Tagespreis und Preis am Vortag hat für verschiedene Tage verschiedene Werte. Nun ermittelte er die Häufigkeit von Kursänderungen größer 1 %, größer 2 % usw. und stellte diese in einem doppelt logarithmischen Diagramm dar.



Die Daten ergeben eine Gerade (eine entsprechende Gerade erhält man auch für Kursrückgänge).

Die Gerade im doppelt logarithmischen Diagramm entspricht einem Potenzgesetz für die Häufigkeit  $H$  eines Kursanstiegs  $P$ :  $H(P) \sim (P)^{-1.70}$

Punkt 1 des Diagramms bedeutet z.B., daß an 20 % aller Tage ist der Kursanstieg größer als 1 % ist.

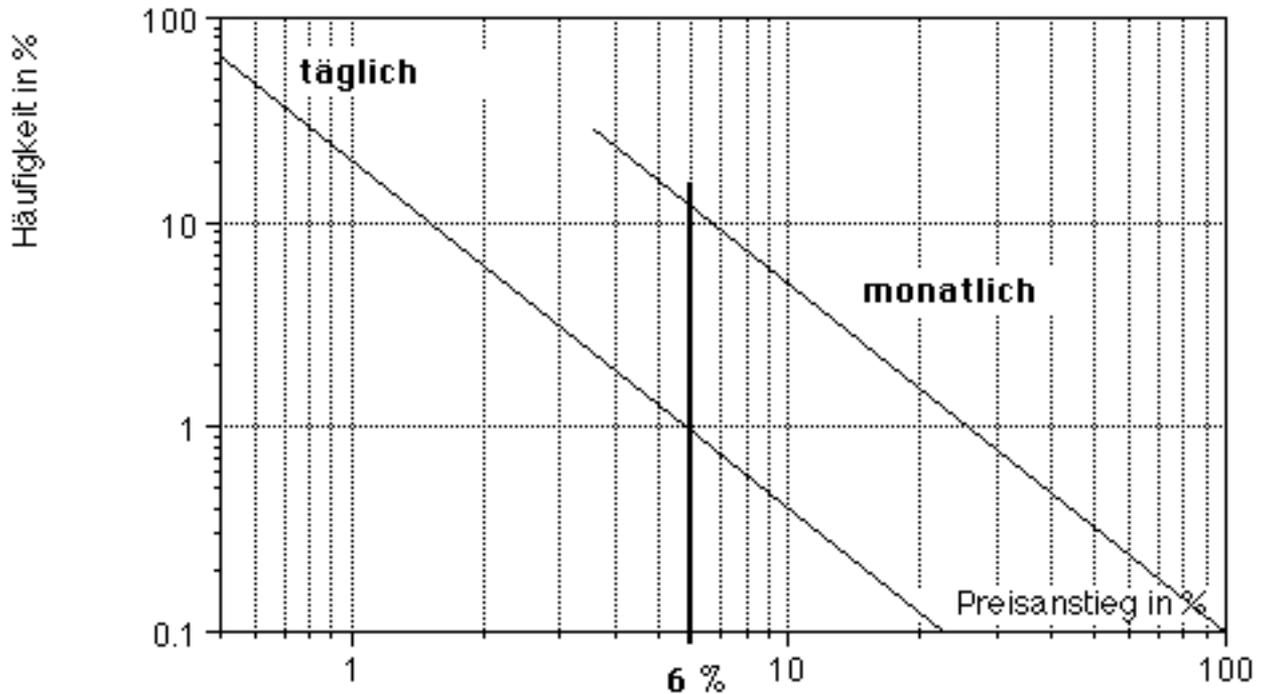
Vergleicht man Punkt 1 mit Punkt 2, so kommt ein doppelt so großer Kursanstieg (2 % statt 1 %) nur etwa 1/3 so oft vor (6 % Häufigkeit statt 20 %).

Ein nochmals verdoppelter Kursanstieg (4 % statt 2 %) kommt wiederum nur 1/3 so oft vor (Häufigkeit 2 % statt 6 %).

Die Selbstähnlichkeit bedeutet hier also, daß sich die Häufigkeit bei jeder Verdopplung des Kursanstiegs auf jeweils denselben Bruchteil von ca. 1/3 des vorigen Wertes verringert. Es gibt also - wie bei jeder Selbstähnlichkeit - keinen ausgezeichneten Maßstab.

Die Selbstähnlichkeit geht sogar noch weiter:

Das nächste Diagramm zeigt die Schlußnotierungen am 15. jedes Monats in den Jahren 1880 bis 1940, also bei monatlicher Auswertung. Es ergibt sich wiederum eine Gerade, die erwartungsgemäß darüber liegt, da von Monat zu Monat ein bestimmter Kursanstieg häufiger ist als von Tag zu Tag, z.B. kommt ein Kursanstieg von 6 % nur an 1 % aller Tage vor, dagegen in etwa 15 % aller Monate.



Sehr bemerkenswert ist nun, daß beide Geraden zueinander parallel sind; ihre Neigung (der Exponent des Potenzgesetzes) ist identisch; d.h. die monatlichen Schwankungen verhalten sich wie die täglichen Schwankungen:

auch die monatliche Häufigkeit verringert sich bei jeder Verdopplung des Kursanstiegs auf jeweils denselben Bruchteil von ca.  $1/3$ . Es gibt also - wie bei jeder Selbstähnlichkeit - keinen besonders ausgezeichneten Zeitmaßstab.

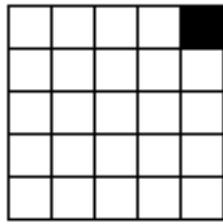
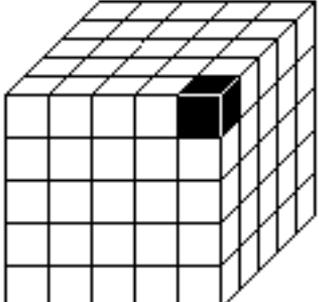
Die "Chartisten" unter den Börsianern behaupten, aus der Geometrie der Kurslinie Signale und Aussagen über die künftige Entwicklung der Kurse erkennen zu können. Wegen der von Mandelbrot nachgewiesenen Skaleninvarianz muß man dies bezweifeln.

### 5.8 Fraktale Dimension

Unser gewohnter Dimensionsbegriff in der Geometrie ist die *euklidische Dimension*

- Ein Punkt hat die Dimension 0.
- Eine Strecke hat die Dimension 1
- Eine Fläche hat die Dimension 2
- Ein Würfel hat die Dimension 3

Die Objekte der euklidischen Geometrie haben also eine ganzzahlige Dimension.

	<p>Bei Verkleinerung auf 1/5 ist die Teilstrecke 5 mal enthalten <u>Dimension D = 1</u></p>	$5 = \frac{1}{(1/5)^1}$
	<p>Bei Verkleinerung auf 1/5 ist die Teilfläche 25 mal enthalten <u>Dimension D = 2</u></p>	$25 = \frac{1}{(1/5)^2}$
	<p>Bei Verkleinerung auf 1/5 ist der Teilwürfel 125 mal enthalten <u>Dimension D = 3</u></p>	$125 = \frac{1}{(1/5)^3}$

Für die Objekte der euklidischen Geometrie gilt also bei einem Verkleinerungsfaktor  $s$  (oben  $s=5$ ) für die Anzahl  $a$  der verkleinerten Objekte und für die Dimension  $D$

$$a = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)^D} \quad D = \frac{\log a}{\log s}$$

Diese Gleichung läßt sich nun auch auf Fraktale übertragen:

Für den Cantor Staub ( $a=2$ ,  $s=3$ ) ist  $D = 0,630\dots$  Es ergibt sich eine *gebrochene Dimension*. Der Cantor-Staub mehr als ein Punkt (Dimension 0), aber weniger als eine Strecke (Dimension 1).

Das Sierpinski-Dreieck ( $a=3$ ,  $s=2$ ) bekommt die Dimension  $D=1,585\dots$  Es ist mehr als eine Strecke ( $D=1$ ), aber weniger als eine Fläche ( $D=2$ ).

Die geniale Idee, gebrochene Dimensionen einzuführen, stammt von dem Mathematiker Felix Hausdorff aus dem Jahr 1919. Die "fraktale Dimension" zeigt, daß Komplexität auch meßbar gemacht werden kann.

## 6. Schlußbemerkung

Die Erforschung der Dynamik nichtlinearer Systeme hat als destruktives Konsequenz, daß Langzeitprognosen unter bestimmten Bedingungen nicht mehr möglich sind. Der Grund liegt in der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Als konstruktive Konsequenz ergeben sich jedoch neue Betrachtungsweisen, Einsichten und Gesetzmäßigkeiten, die vor allem für die Naturwissenschaften von großer Tragweite sind.

Unser Naturbild bekommt durch die Erforschung der Dynamik nichtlinearer Systeme sowie durch Forschungen auf dem ebenfalls aktuellen Gebiet der Selbstorganisation (Synergetik) eine weitere Dimension. Mechanistische Bilder müssen endgültig dem Bild vom "kreativen Universum" weichen.

*Quellen und Medien*Einführendes

Gleick, J.: Chaos - die Ordnung des Universums  
Knaur-TB Nr. 4078, 1990 (gute Einführung)

Nürnberger, Ch.: Faszination Chaos, Wie zufällig Ordnung entsteht  
TRIAS, 1993 (knappe Einführung)

Chaos und Kreativität  
Geo-Heft, Nachdruck Nov. 1993

Davies, P.: Prinzip Chaos - Die neue Ordnung des Kosmos  
Goldmann-Taschenbuch Nr. 11469, 1991

Breuer, R. (Hrsg.): Der Flügelschlag des Schmetterlings, Ein neues Weltbild durch die  
Chaosforschung; Deutsche Verlagsanstalt, 1993

Weiterführend oder zu speziellen Aspekten:

Behr, R.: Fraktale - Formen aus Mathematik und Natur  
Klett, 1993

Escher, M.C.: Graphik und Zeichnungen  
Taschen, 1993

Emmeche, C.: Das lebende Spiel, Wie die Natur Formen erzeugt  
rororo TB Nr. 9618, 1994

Braitenberg, V. u.a.: Evolution, Entwicklung und Organisation in der Natur  
rororo TB Nr. 9706, 1994

Küppers, B.-O. (Hrsg.): Ordnung aus dem Chaos, Prinzipien der Selbstorganisation und  
Evolution des Lebens; Serie Pieper, 1987

Cramer, F: Chaos und Ordnung - Die komplexe Struktur des Lebendigen  
Insel-TB Nr. 1496, 1993

Kanitschneider, B.: Von der mechanistischen Welt zum kreativen Universum, Zu einem  
philosophischen Verständnis der Natur; Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1993

Zeitler, H. u.a.: Fraktale und Chaos, Eine Einführung  
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1993

Peitgen, Heinz-Otto u.a.: Fraktale - Bausteine des Chaos,  
Klett-Cotta / Springer, 1992

Peitgen, Heinz-Otto u.a.: Chaos - Bausteine der Ordnung,  
Klett-Cotta / Springer, 1994

Mandelbrot, Benoît: Die fraktale Geometrie der Natur  
Birkhäuser, 1991

Videos (in der Videothek der Fachschaft Physik):

Fraktale in Filmen und Gesprächen, Spektrum Verlag

Chaos, Ordnung und assoziatives Gedächtnis, Spektrum Verlag

Der fraktale Flohmarkt, Spektrum Verlag