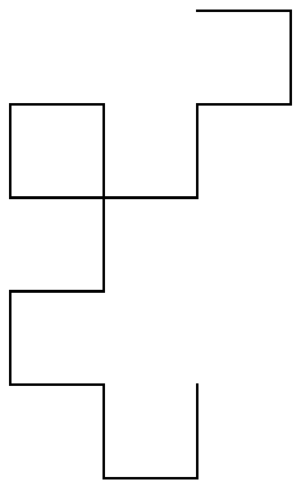
Papierfalten

J.G. 2/94,3/98

Ein Blatt Papier und eine Schere genügen: fortgesetztes Falten erzeugt Papierschlangen, deren Gestalt zunehmend komplizierter wird.
Man findet sie in Michael Crichtons Sience-Fiction Roman "DinoPark" als Ikone der "Chaostheorie":

Erste Iteration



"Bei den ersten Darstellungen der Fraktalkurve zeigen sich nur wenige Hinweise auf die zugrundeliegende mathematische Struktur."
Ian Malcolm

Die nacheinander ausgeführten Faltungen stellen in mathematischer Hinsicht eine iterierte Abbildung dar. Bei passender Skalierung liefert dieser rückgekoppelte Prozeß ein Fraktal ("Drachenkurve") mit verblüffenden Eigenschaften.
Geeignete Modellbildungen erlauben genauere Untersuchungen:

- unter *geometrischem* Aspekt zum Bildungsgesetz, zu Symmetrie, Selbstähnlichkeit, Kurvenlänge, Dimension,
- und unter *zahlentheoretischem* Aspekt, der die Drachenkurve als Zahl auffaßt.

Das Papierfalten ist ein hervorragendes Beispiel für das Zusammenspiel von Experiment mit verschiedenen Teilgebieten der Mathematik
Die Arbeitsblätter mit über 40 Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit eignen sich für Klassen von Unter- bis Oberstufe; die Ergebnisse und Ergänzungen befinden sich im Anhang .

Jürgen Giesen, Frankenkamp 12 a, 59514 Welver;
juergen@giesen.DInet.de; http://www.giesen.DInet.de

Quellen:

Die Anregung zu dieser Ausarbeitung lieferte:
H.-O. Peitgen: Was hat Papierfalten mit Mathematik zu tun ?, Vortrag gehalten auf der Lehrerakademie "Chaos und Fraktale" in Bremen am 22.9.1993.

M. Crichton: DinoPark, Droemer Knaur, München 1991.

M. Schroeder: Fractals, Chaos, Power Laws, W.H. Freeman, New York 1991.

Deutsche Ausgabe:

M: Schroeder: Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit, Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit; Spektrum Akademischer Vlg, 1994; ISBN 3-86025-092-2

Weitere Literatur:

B. Zühlke: Über Papierfaltfolgen und Drachenkurven zu Methoden der Fraktalen Geometrie
MNU 50/1 (15.1.1997) Seiten 10-15

J. Carow: Aufgaben für Mathematikzirkel der Mittelstufe - Papierfalten
MNU 50/7 (15.10.1997) Seiten 432-433

R. Albers: Drachenkurven und Selbstähnlichkeit
MNU 50/8 (1.12.1997) Seiten 456-458

Centrum für Complexe Syteme und Visualisierung (CeVis), Universität Bremen
http://www.cevis.uni-bremen.de/education/Lehrakad.html

H.O. Peitgen, R. Albers: Papierfalten
Lehrerakademie Bremen, Materialien Band 3, Seiten 1-79 (zu beziehen über CeVis)

Internet-Links:

Projekt Drachenkurve
http://www.tu-bs.de/schulen/stsemwob/projekte/chaos/drachen.htm

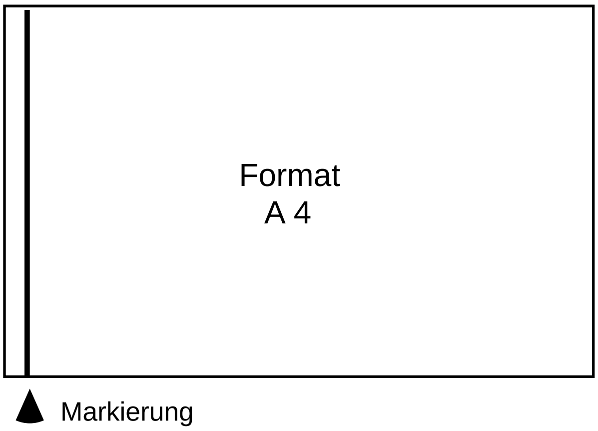
Chaos und Fraktale:
http://www.fh-lueneburg.de/u1/gym03/homepage/faecher/mathe/chaos/chaos.htm

Drachenkurve als Applet:
http://did.mat.uni-bayreuth.de/~alfred/Dragon/d1.html

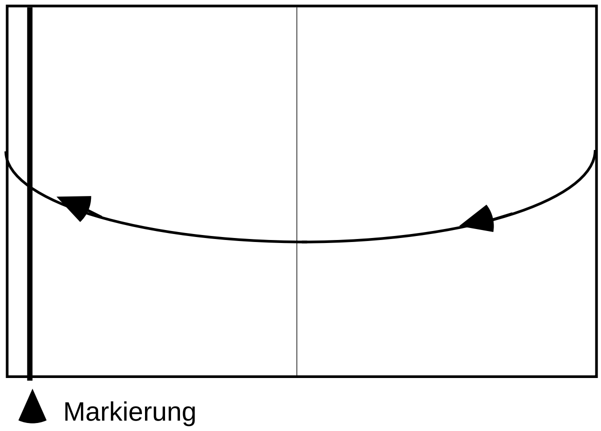
Mathematisches Kabinett: http://did.mat.uni-bayreuth.de/mathe.html

Das Experiment

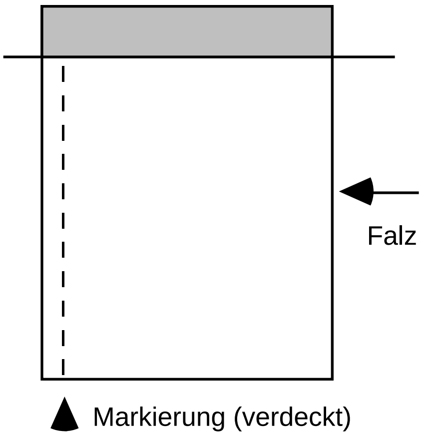
A. Linke Kante durch Strich markieren:



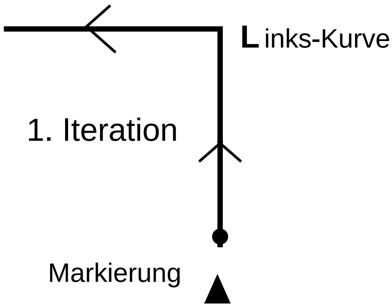
B. Rechte Hälfte über die linke falten:



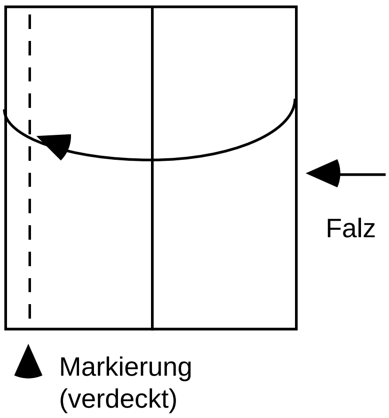
C. Streifen abschneiden:



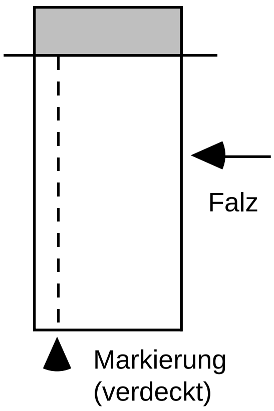
D. Abgeschnittenen Streifen rechtwinklig aufklappen:



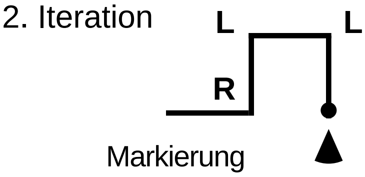
E. Rechte Hälfte über die linke falten:



F. Streifen abschneiden:



G. Streifen aufklappen:



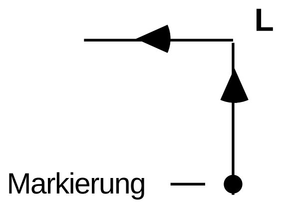
Schritte B,C,D bzw. E,F,G wiederholen

Aufgaben: 1. Teil

1. Wie ändert sich die Kantenlänge bei jedem Schritt der Faltung ?

2. Die aufgefalteten Schlangen sollen auf kariertem Papier maßstabsgetreu bis zum 5. Schritt gezeichnet werden; im 5. Schritt soll die Kantenlänge 0,5 cm betragen; mit welcher Kantenlänge muß man beginnen ?

3. Beginne jede Zeichnung mit der Falte, die der Markierung folgt, als **L**inks-Falte:



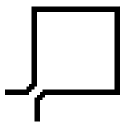
4. Wie verhält sich die Gesamtgröße der Papierschlangen beim weiteren Falten ?

5. Notiere die Art und Reihenfolge der Falten mit den Symbolen **L=L**inks und **R**= **R**echts:

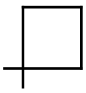
1. Schritt: **L**
2. Schritt: **LLR**
3. Schritt: **L**...................
4. Schritt: **L**.......................................
5. Schritt: **L**...

6. Wieviel Falten gibt es nach dem 1., 2., 3., 4., ..., n-ten Schritt ?

7. Bei welchem Schritt tritt erstmals eine <u>geschlossene</u> Masche auf ?
(Berührung von Kanten)

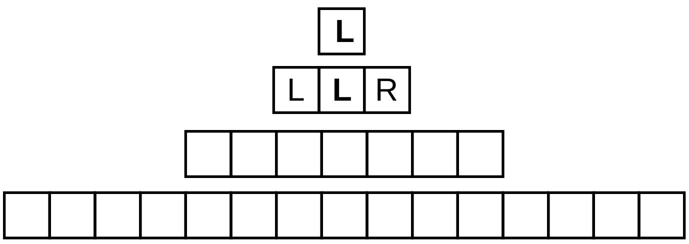


8. Gibt es <u>Überschneidungen</u> ?



9. Welcher Art ist jeweils die <u>mittlere</u> Falte ?

10. Wie erhält man die Falten-Folge des nächsten Schritts aus der des vorherigen ? Wie lautet also das <u>Bildungsgesetz</u> ? Es gibt (2) verschiedene Möglichkeiten der Formulierung.
Hinweis: schreibe die Folgen <u>zentriert</u> auf und vergleiche mit der vorigen.



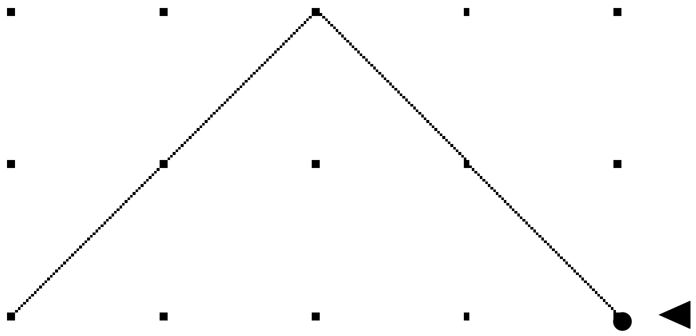
11. Wieviel gleichartige Falten treten höchstens nacheinander auf ?

12. Ist die Falten-Folge periodisch ?

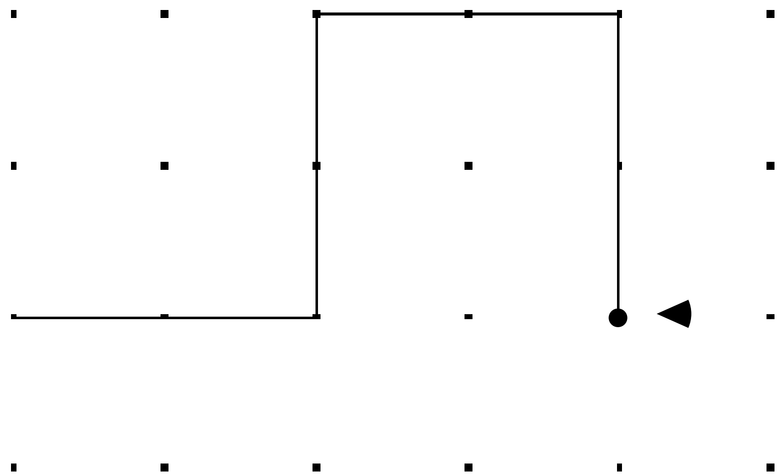
13. Erläutere das Prinzip der "Rückkopplung" bei dem Prozeß des Papierfaltens.

Es gibt ein geometrisches Konstruktionsverfahren, das die jeweils folgende Faltung liefert, jedoch bis auf den Maßstab (Kantenlänge) und die Orientierung.

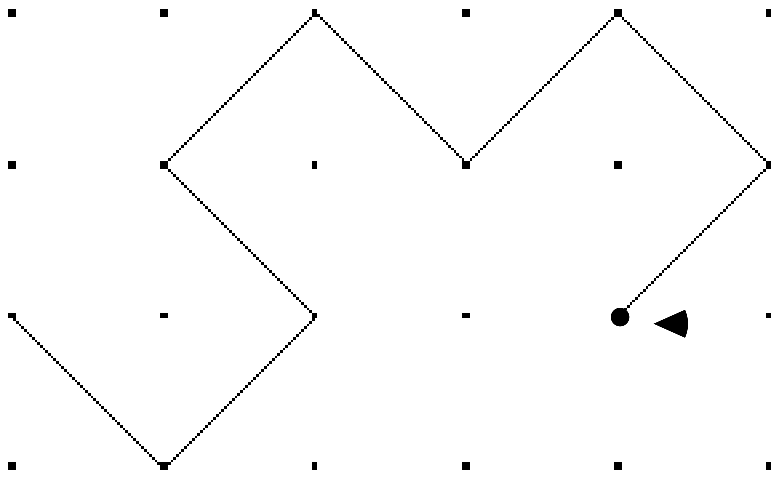
14. Wie ergibt sich aus der 1. Faltung die 2. ?
Hinweis: Ergänze die Figur ausgehend von den schon benutzten Gitterpunkten; die 3 Ecken der 2. Faltung liegen jeweils auf Gitterpunkten.



15. Wie gelangt man von der 2. Faltung zur 3. ?



16. Und von der 3. Faltung zur 4. ?



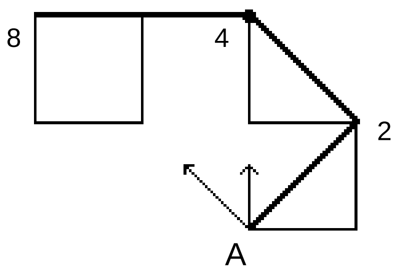
17. Wie verhält sich bei diesem Verfahren die Größe der Papierdrachen, um welchen Faktor ändert sich bei jedem Schritt die Kantenlänge ?

18. Auf Grund dieses Verfahrens läßt sich das Bildungsgesetz auf eine zweite Art angeben:

1. $\boxed{\mathbf{L}}$ → L $\boxed{\mathbf{L}}$ R
2. $\boxed{\mathbf{L}}\boxed{\mathbf{L}}\boxed{\mathbf{R}}$ → _ $\boxed{\mathbf{L}}$ _ $\boxed{\mathbf{L}}$ _ $\boxed{\mathbf{R}}$ _
3. $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ → _ $\boxed{\ }$ _ $\boxed{\ }$ _ $\boxed{\ }$ _ $\boxed{\ }$ _ $\boxed{\ }$ _ $\boxed{\ }$ _ $\boxed{\ }$ _
4. ....

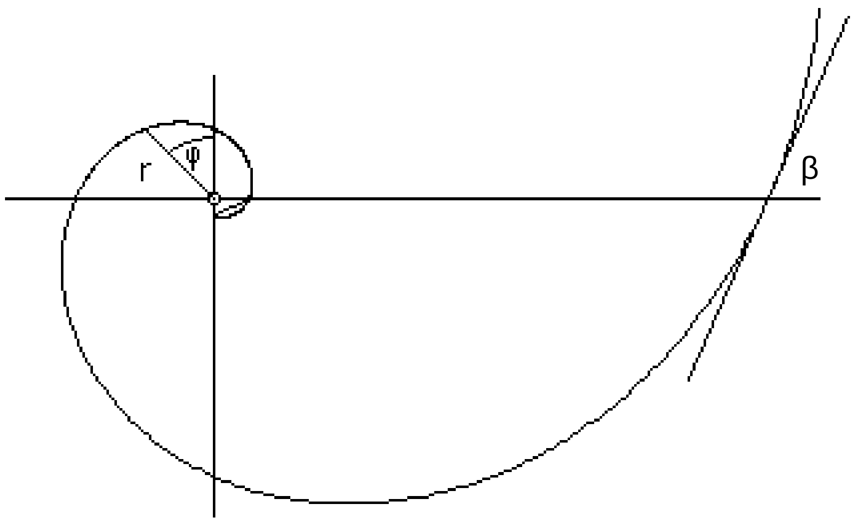
19. Zeichne die erste Hälfte jedes Drachens (von der Markierung bis zum mittleren L) in anderer Farbe nach und begründe die (für Fraktale typische) Eigenschaft der "Selbstähnlichkeit".

20. Markiere in der ersten Hälfte einer Drachenkurve (z.B. 7. Iteration) alle Mittelpunkte der vorherigen Iterationen. Was für eine Kurve entsteht dabei ?



Bestimme die Abstände der Mittelpunkte 2, 4, 8, ... vom Anfangspunkt A durch Messung oder Rechnung (Pythagoras) und die Winkel, die die Verbindungsstrecken vom Anfangspunkt zu diesen Mittelpunkten einschließen.
Wie ändern sich die Werte ?

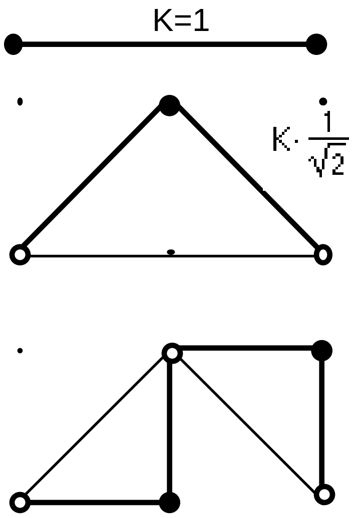
21. Die Spirale in **20** kann durch die Gleichung $r = r_0 \cdot e^{a\phi}$ beschrieben werden



Berechne die Konstante a , wenn ϕ in Grad gemessen wird ?

Wie groß ist der Winkel β , unter dem <u>jeder</u> Radius die Tangente schneidet ?

22. Das Konstruktionsverfahren der Drachenkurve läßt sich wie folgt darstellen:
der Linienzug ("Initiator", Kantenlänge K) wird durch die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ("Generator") ersetzt; bei der Fortsetzung ist zu beachten, daß die Orientierung der Dreiecke abwechselt.



Initiator
(0. Schritt)

Generator
(1. Schritt)

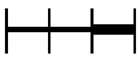
2. Schritt

Schritt	Anzahl	Länge	Gesamtlänge
0	1	1	1
1	2		
2			
3			
4			
n			

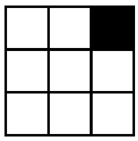
Vervollständige die Tabelle.

23. Welche Dimension hat die Drachenkurve ?

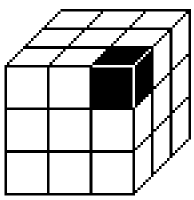
Dimension D



D = 1



D = 2



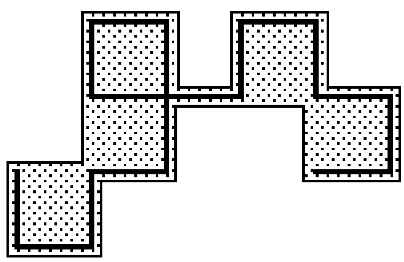
D = 3

Verkleinerungs-faktor s	Anzahl a der Teile	$a = \frac{1}{s^D}$	**D**
$\frac{1}{3}$	3	$3 = 3^1$	**1**
$\frac{1}{3}$	9	$9 = 3^2$	**2**
$\frac{1}{3}$	27	$27 = 3^3$	**3**

Bestimme die Dimension D der Drachenkurve gemäß

$$a = \frac{1}{s^D}$$

24. Schneide mehrere Drachen der 4. Stufe aus. Wie kann man sie lückenlos und ohne Überschneidung von Linien aneinanderlegen ?



25. In welchem Verhältnis stehen die Anzahlen von L und R ?

Iteration	Anzahl L	Anzahl R	Verhältnis L:R
1	1	0	-
2	2	1	
3			
4			
5			
n			

26. In der 4. Iteration tritt erstmals eine geschlossene Masche auf. Zähle in den Zeichnungen der folgenden Iterationen die Maschen und bilde das Verhältnis, in dem die Anzahl der Kanten (Geradenstücke) zur Anzahl der Maschen steht.

Iteration	Kantenzahl k	Maschenzahl m	$\frac{k}{m}$
3	8	0	-
4	16	1	15
5			
6			
7			
8			
9			

Welchem Wert sollte sich das Verhältnis nähern, wenn die Drachenkurve flächenfüllend ist ?

27. In der Zeichnung der Zeichnung des 5. Drachens kommen 4 geschlossene Maschen vor, die entsprechende Symbolfolge

LLRLLRR**LLL**RRLRR**LLL**RLL**RRR**LLRRLRR

enthält jedoch nur insgesamt drei LLL- und RRR-Sequenzen. Erkläre.

28. Bestimme in den Symbolfolgen die Anzahl der **LLL**- und **RRR**-Sequenzen (Zählen oder aufgrund des Bildungsgesetzes):

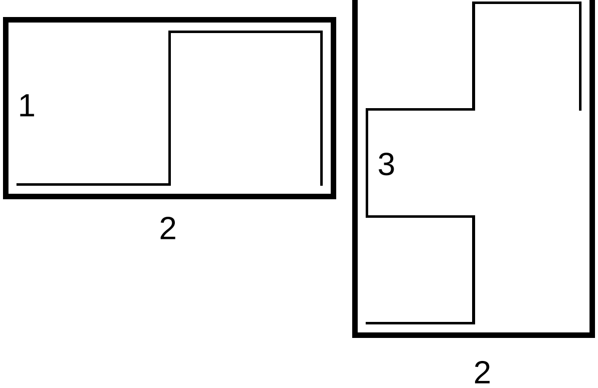
Iteration	Kantenzahl k	LLL	RRR	Verhältnis $\frac{k}{s}$
3	8	0	0	-
4	16	1	0	16
5	32	2		
6	64	4		
7	128	8		
8	256	16		
9	512	32		

Begründe das Ergebnis für das Verhältnis von Kantenzahl k zur Summe s von LLL- und RRR-Sequenzen.

29.

2. Iteration

3. Iteration

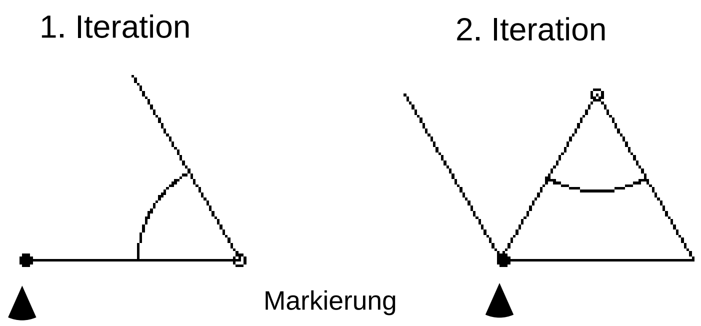


Jede Drachenkurve kann durch ein Rechteck eingeschlossen werden. Untersuche das Verhältnis der Seitenlängen (Zählen).
a sei die kürzere und b die längere Seite des Rechtecks.

Hinweis: das Verhältnis $\frac{a}{b}$ nähert sich mit zunehmender Iteration verschiedenen Werten, je nachdem ob die Iteration gerade oder ungerade ist.

Iterat.	a	b	a / b	a / b
1	1	1	1	1,0000
2	1	2	1/2	0,5000
3	2	3	2/3	0,6667
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

30. Beim Aufklappen der gefalteten Papierschlangen kann sind auch andere Winkel als 90° möglich, z.B. 60°.



Aufgaben 2. Teil

31. In jeder der Papierschlangen ist eine Zahl verborgen, deren Ziffern durch die Falten dargestellt werden.

Für die Darstellung einer Zahl z im Stellenwert-System mit der Basis b gilt:

$$z = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

wobei die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 sind die Ziffern der Zahl z sind. Da nur zwei Arten von Falten vorkommen, ist das Dualsystem (Basis 2, Ziffern 0 und 1) besonders geeignet.

Dezimal-System:

5432	= $\mathbf{5}\cdot 1000$	+	$\mathbf{4}\cdot 100$	+	$\mathbf{3}\cdot 10$	+	$\mathbf{2}\cdot 1$	
	= $\mathbf{5}\cdot 10^3$	+	$\mathbf{4}\cdot 10^3$	+	$\mathbf{3}\cdot 10^1$	+	$\mathbf{2}\cdot 10^0$	
0,5432	= $\mathbf{5}\cdot 10^{-1}$	+	$\mathbf{4}\cdot 10^{-2}$	+	$\mathbf{3}\cdot 10^{-3}$	+	$\mathbf{2}\cdot 10^0$	

Dual-System:

0	=	0								
1	=	1								
10	=	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$		= 2				
11	=	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$		= 3				
100	=	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$	= 4			
101	=	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$	= 5			
110	=	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$	= 6			
111	=	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$	= 7			
1000	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$	= 8	
1001	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$	= 9	
1010	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$	= 10	
1011	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$	= 11	
1100	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$	= 12	
1101	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$	= 13	
1110	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{0}\cdot 2^0$	= 14	
1111	=	$\mathbf{1}\cdot 2^3$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^2$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^1$	+	$\mathbf{1}\cdot 2^0$	= 15	

		dual		*dezimal*	
0,1	=	$\mathbf{1}\cdot 2^{-1}$	$= \mathbf{1}\cdot \frac{1}{2}$	= 0,5	
0,11	=	$\mathbf{1}\cdot 2^{-1} + \mathbf{1}\cdot 2^{-2}$	$= \mathbf{1}\cdot \frac{1}{2} + \mathbf{1}\cdot \frac{1}{4}$	= 0,5 + 0.25	= 0,75
0,101	=	$\mathbf{1}\cdot 2^{-1} + \mathbf{0}\cdot 2^{-2} + \mathbf{1}\cdot 2^{-3}$	$= \mathbf{1}\cdot \frac{1}{2} + \mathbf{0}\cdot \frac{1}{4} + \mathbf{1}\cdot \frac{1}{8}$	= 0,5 + 0.125	= 0,625
0,111	=	$\mathbf{1}\cdot 2^{-1} + \mathbf{1}\cdot 2^{-2} + \mathbf{1}\cdot 2^{-3}$	$= \mathbf{1}\cdot \frac{1}{2} + \mathbf{1}\cdot \frac{1}{4} + \mathbf{1}\cdot \frac{1}{8}$	= 0,5 + 0.25 + 0,125	= 0,875

Wir setzen in der Faltungsfolge **L = 1** und **R = 0** und bilden die entsprechenden Dualzahlen <1, also beginnend mit **0,...**

32. Berechne die dezimalen Werte:

1. **L** = **0,1** = ...
2. **LLR** = **0,110** = ...
3. **LLRLLRR** = **0,1101100** = ...

   ....
4. ....

   ....
5. ....

   ....

33. Welche Eigenschaft hat die Zahlenfolge ?

34. Der Grenzwert der Faltungsfolge sei **P** ("Papierfaltungszahl"); begründe, daß **P** <u>irrational</u> ist.

35. Welche dezimalen Werte erhält man, wenn L = 0 und R = 1 gesetzt wird ?

P =

0	.	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0

. . .

36. Einfüllen von 1 und 0 in P ergibt eine neue Zahl Q_1:

0	**.**	1	**1**	0	**1**	1	**0**	0	**1**	1	**1**		**0**		**0**		**1**		**1**		**1**		**0**

Q_1 = 0, 1 1 0 1 1 0 0 1 . . . .

- Vervollständige das alternierende Einfüllen in **P**. Vergleiche **P** und **Q_1**.
- Begründe, daß in P die Sequenzen 1111 und 0000 nicht auftreten können.
- In welchem Zusammenhang steht das Einfüllen von 1-0 mit dem geometrischen Konstruktionsverfahren (Seite 4)?

37. Weglassen von 1-0 in P ergibt eine Zahl Q_2:

0	**.**	1	**1**	**0**	1	**1**	**0**	0	1	1	**1**	**0**	0	**1**	**0**	0	1	1	**1**	**0**	1	**1**	**0**

Q_2 = 0, 1 1

Bilde **Q_2** und vergleiche **P** mit **Q_2**.

38. Nullen in P einfüllen ergibt eine Zahl R:

0	**.**	0	**1**	0	**1**	0	**0**	0	**1**	1	**1**		**0**		**0**		**1**		**1**		**1**		**0**

R = 0,0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 . . . .

Vergleiche **P** und **R**.

39. Differenz von P und R:

P = 0,1101100111001001...
R = 0,0101000101000001010100000 1
P-R = 0,..................

Subtrahiere **R** von **P**. Welcher Art ist die Zahl P - R ?

40. Berechne den dezimalen Wert von P - R.

41. Zeige: $P - R = \frac{s}{1 - s^4}$ (mit $s = \frac{1}{2}$).

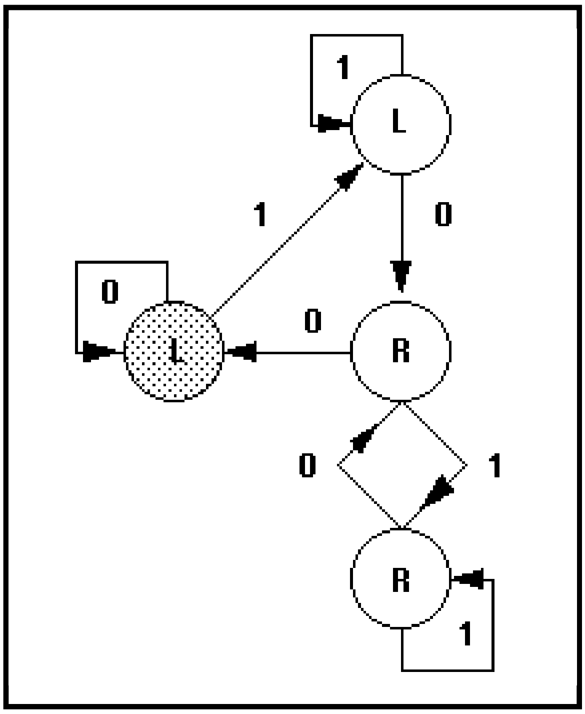
42. Zeige: Bei der Subtraktion in **41** steht über einer 1 in R immer eine 1 in P (d.h. es tritt kein Übertrag auf). Hinweis: in R steht eine 1 stets an ungerader Position 2k+1 (k=0,1,..); benutze den Automaten für P.

43. Endlicher Automat

Um das an einer bestimmten Position k stehende Symbol der Folge mit Hilfe des Bildungsgesetzes durch Reflektion zu bestimmen, sind bei großem k viele komplexe Schritte nötig;
z.B. bei k=1022 sind 10 Schritte erforderlich, die Folge enthält 2^{10}=1024 Symbole.

Mit einem geeigneten "endlichen Automaten" läßt sich der Aufwand erheblich reduzieren. Man stellt die Zahl k binär dar und benutzt die Ziffern dieser Darstellung als Arbeitstakte des Automaten.

Automat zur Bestimmung der k-ten Stelle von P



<u>1. Beispiel:</u>

k = **10** binär: k= **1010** **L L R L L R R L L L R R L R R**
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 **10**

beginnend mit L $\xrightarrow{1}$ **L** $\xrightarrow{0}$ **R** $\xrightarrow{1}$ **R** $\xrightarrow{0}$ **R**

<u>2. Beispiel:</u>

k = **1022** binär: k= **1111111110**

beginnend mit L $\xrightarrow{1}$ **L** $\xrightarrow{\text{8 mal 1}}$ **L** $\xrightarrow{0}$ **R**

44. Welche Überlegungen führen zu dem Automaten, der die Ziffern der Papierfaltungszahl P produziert ?

Zählt man die Positionen beginnend mit 0:

```
           LLRLLRRLLLRRLRR...
Position:  0123456789
```

und verwendet die neuen Symbolen A, B, C, D

L an gerader Position = A
L an ungerader Position = B
R an gerader Position = C
R an ungerader Position = D

so ergibt sich als "genetischen Code" von P (ähnlich der Abfolge der vier Bausteine A,G T, P in der DNA):

ABCBADCBABCDADC...

Jedes der Symbole ABCD wird nun nach folgenden Regeln durch ein Wort der Länge 2 ersetzt (dupliziert):

A → AB
B → CB
C → AD
D → CD

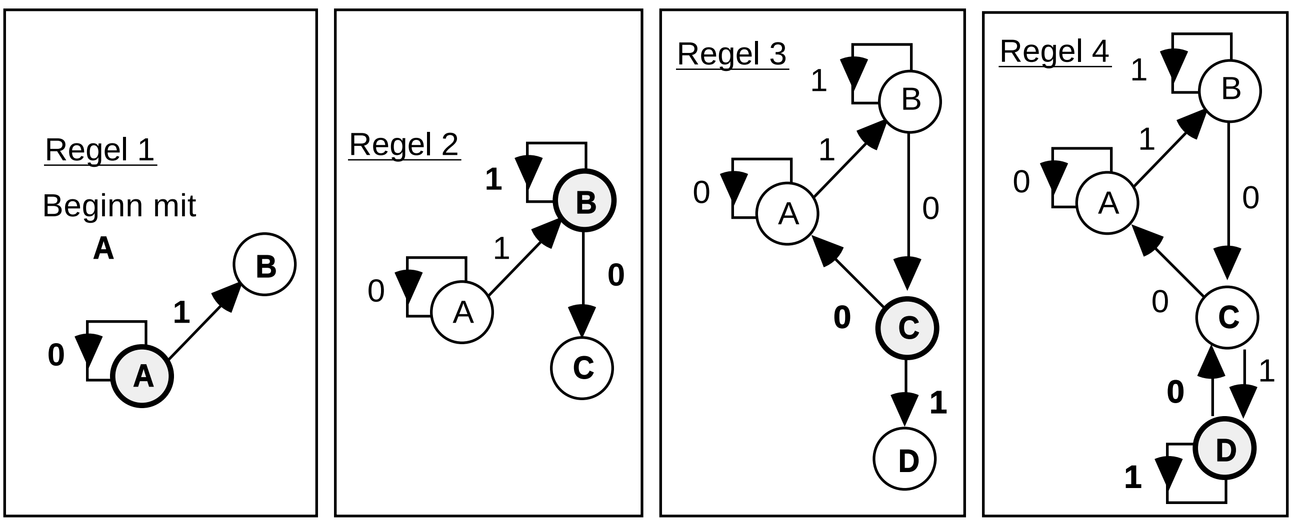
```
  A  B  C  B  A  D  C  B  A  B  C  D  A  D  C ...
→ AB CB AD CB AB CD AD CB AB CB AD CD AB CD AD...
```

Dieser Duplizierungs-Mechanismus reproduziert die ursprüngliche Folge:

```
  A  B  C  B  A  D  C  B  A  B  C  D  A  D  C ...
```

Aus der Ersetzungsregeln ergeben sich dann die Schritte (**0** oder **1)** des Automaten

Regel		**0**	**1**
1	**A** →	**A**	**B**
2	**B** →	**C**	**B**
3	**C** →	**A**	**D**
4	**D** →	**C**	**D**



45. Manche Irrationalzahlen besitzen trotz ihrer unendlichen Anzahl (nichtperiodischer) Stellen eine einfache Darstellung, wenn man sie als Kettenbruch schreibt. Man versteht unter einem (endlichen) Kettenbruch einen Bruch der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [\, a_0 , a_1 , a_2 , \dots, a_{n-1} , a_n \,]$$

mit natürlichen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Man erhält die Kettenbruchentwicklung einer positiven Zahl irrationalen Zahl α , die als Dezimalzahl gegeben ist, durch folgenden Algorithmus:

Aufspalten von α in

$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, den ganzzahligen Anteil,

$< \alpha >$, den Nachkommaanteil

Setze dann:

$x_1 = \dfrac{1}{< \alpha >}$ und $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$

$x_{n+1} = \dfrac{1}{<x_n>}$ $a_{n+1} = \lfloor x_{n+1} \rfloor$ $(n \geq 1)$

<u>Beispiel:</u> $\pi = 3{,}1415926535...$

$a_0 = \lfloor \pi \rfloor = 3$

$< \pi > = 0{,}141592653...$

$x_1 = \dfrac{1}{0{,}141592653...} = 7{,}06251328...$, $a_1 = 7$

$x_2 = \dfrac{1}{0{,}06251328...} = 15{,}996599...$, $a_2 = 15$

usw.

(unendlicher) Kettenbruch: [3, 7, 15, ...]

Warum liefert ein Taschenrechner nur die ersten 8 bis 10 Terme der Kettenbruchentwicklung ?

46. Bestimme die Kettenbruchentwickungen für

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}$, e.

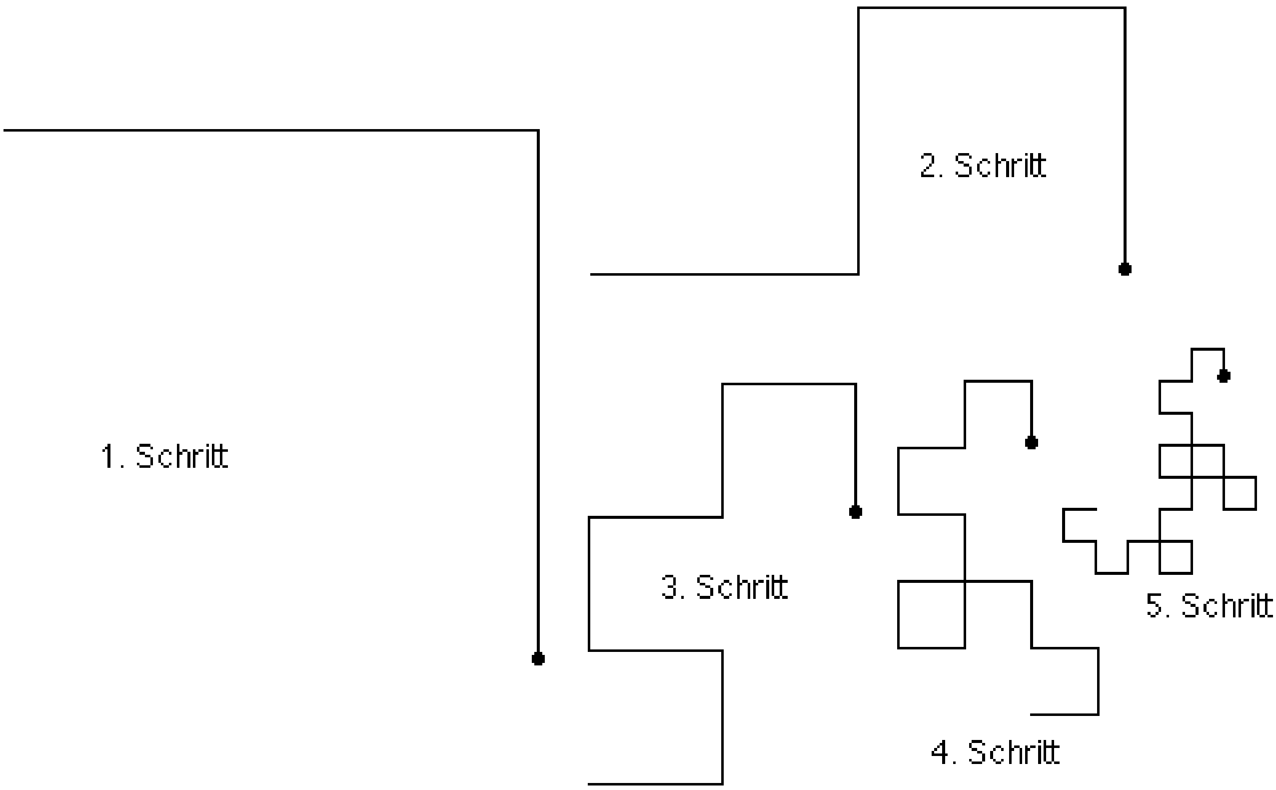
47. Wie lautet die Kettenbruchentwickungen von P = 0.8507361882 ?

Lösungen 1. Teil

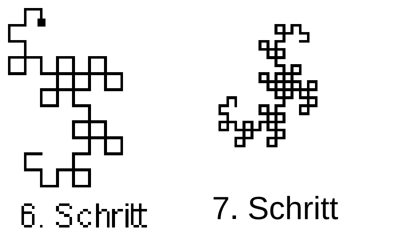
1. Die Kantenlänge K wird jeweils halbiert: $K_n = K_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (n>1)

2. $K_1 = 0{,}5\text{cm} \cdot 2^4 = 8$ cm

3. Die ersten 5 Schritte:



4. Die Papierdrachen werden immer kleiner. Grenzwert der Iteration ist ein Punkt.



5.
1. Schritt: **L**
2. Schritt: L**L**R
3. Schritt: LLR**L**LRR
4. Schritt: LLRLLRR**L**LLRRLRR
5. Schritt: LLRLLRRLLLRRLRR**L**LLRLLRRRLLRRLRR

6.
1. Schritt (n=1): k=1
2. Schritt (n=2): k=3
3. Schritt (n=3): k=7
4. Schritt (n=4): k=15
5. Schritt (n=5): k=31

allgemein (n≥1): $k_{n+1} = 2 \cdot k_n + 1$ oder $k_n = 2^n - 1$

7. Beim 4. Schritt kommt erstmals eine geschlossene Masche vor, dann in allen.

8. Es treten niemals Überschneidungen auf.

9. Die mittlere Falte ist stets **L**; sie entspricht der ersten Faltung des Blattes nach links.

10.

L

L **L** R

L L R **L** L R R

L L R L L R R **L** L L R R L R R

L L R L L R R L L L R R L R R **L** R R L R R L L R R R L L R

1. Bildungsgesetz ("Reflektionsgesetz")

a) vorangehende Folge kopieren

b) **L** anhängen

c) jedes Symbol vor **L** invertieren (L→R, R→L)

Beispiel: 2→3

a) L L R

b) L L R **L**

c) L L R **L** L

L L R **L** L R

L L R **L** L R R

2. Bildungsgesetz

alternierendes Einfüllen von L und R

Beispiel: 2→3

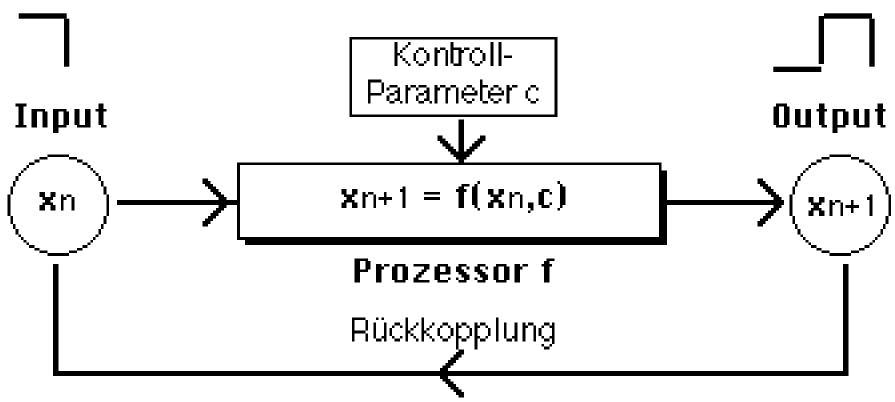
L L R →

L **L** R **L** L **R** R

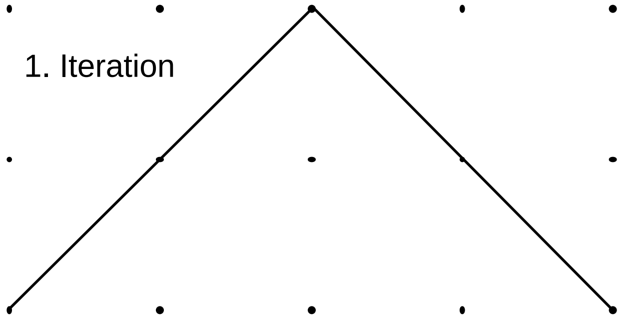
11. Es treten höchstens 3 gleiche Symbole nacheinander auf: LLL oder RRR

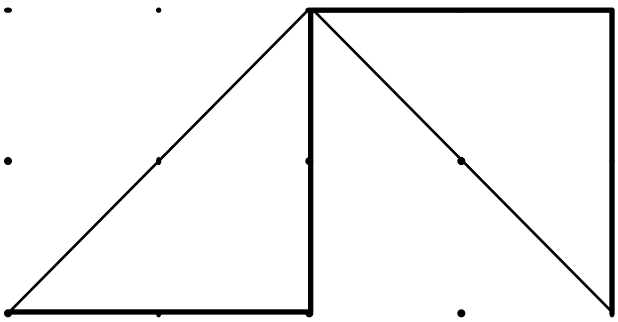
12. Die Folge ist nicht periodisch.

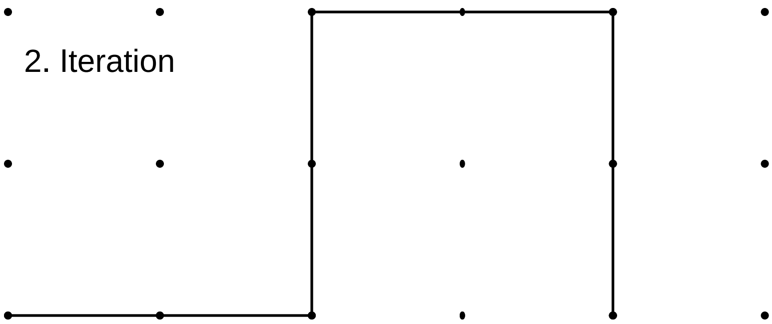
13. Das Ergebnis jeder Faltung (Output) bildet den Ausgangszustand (Input) für die folgende Faltung.

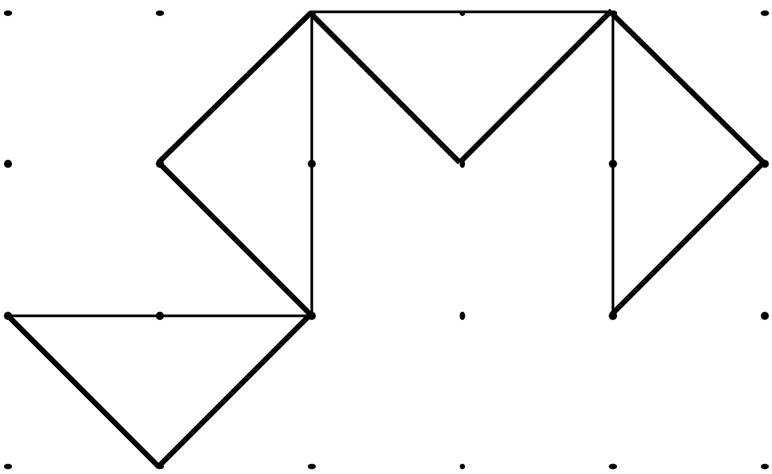


14, 15

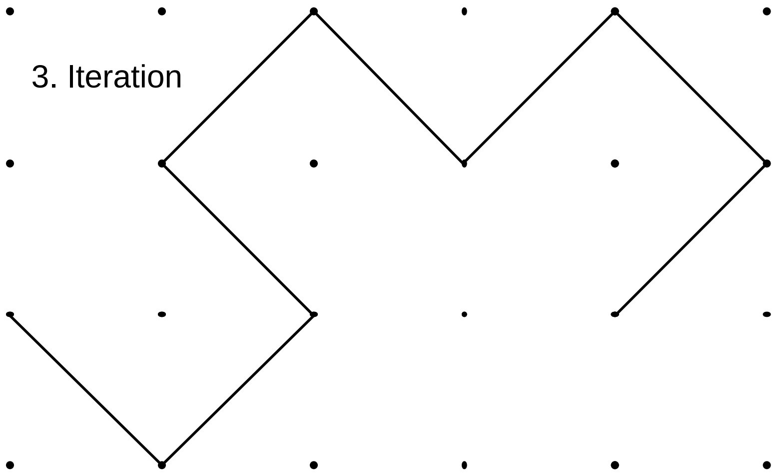


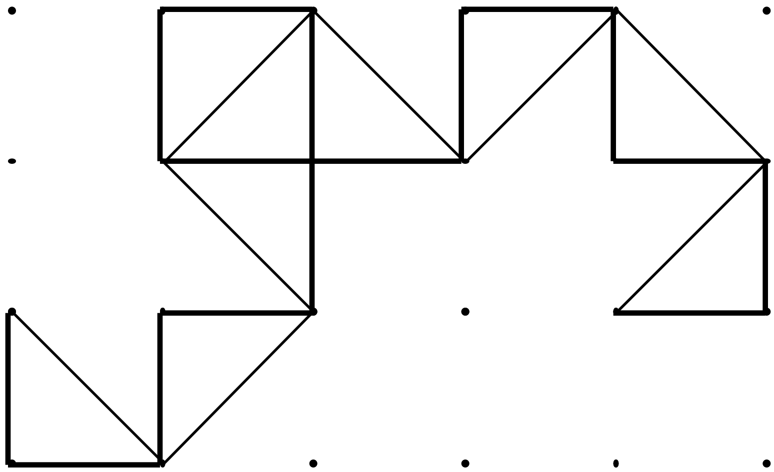






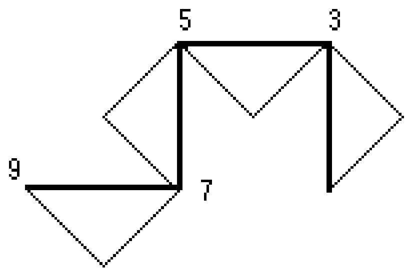
16.





Das Konstruktionsverfahren für die nächste Iterationsstufe besteht darin, daß die Kanten durch rechtwinklige Dreiecke (mit abwechselnder Orientierung) ersetzt werden.

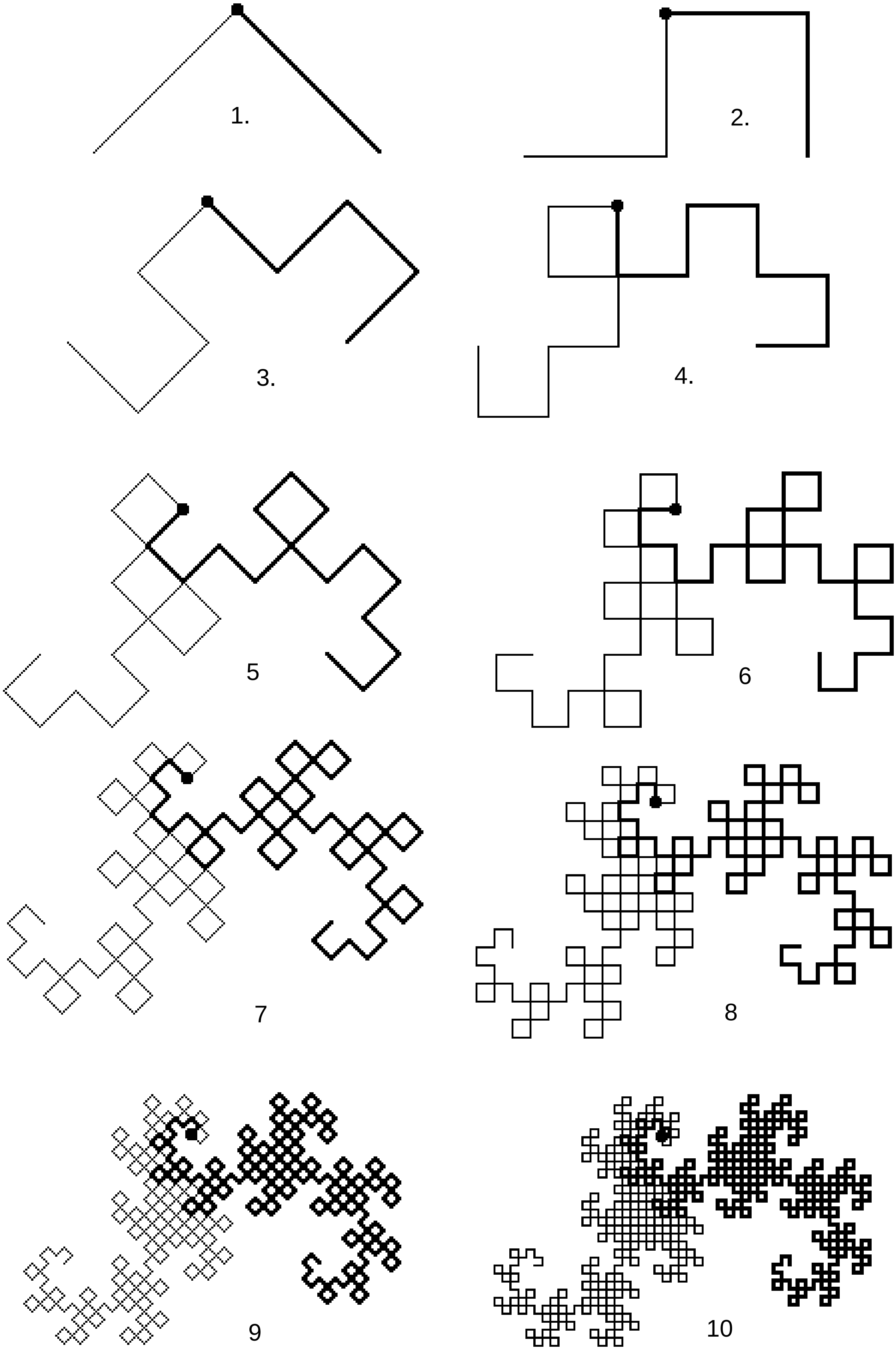
Die vorherige Iterationsstufe ergibt sich entsprechend durch Weglassen von Dreiecken, oder auch durch Verbinden ungerader Ecken.

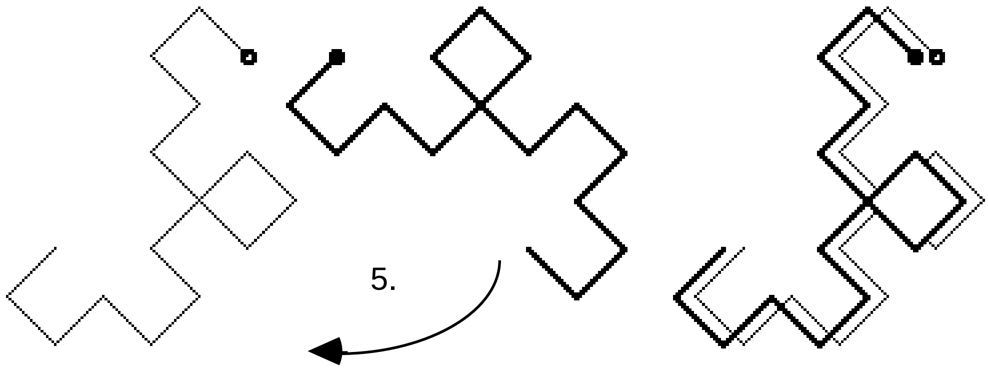


17. Die Gesamtgröße bleibt konstant ! Die Kantenlänge des folgenden Schritts ist $K \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

(und nicht $K \cdot \frac{1}{2}$)

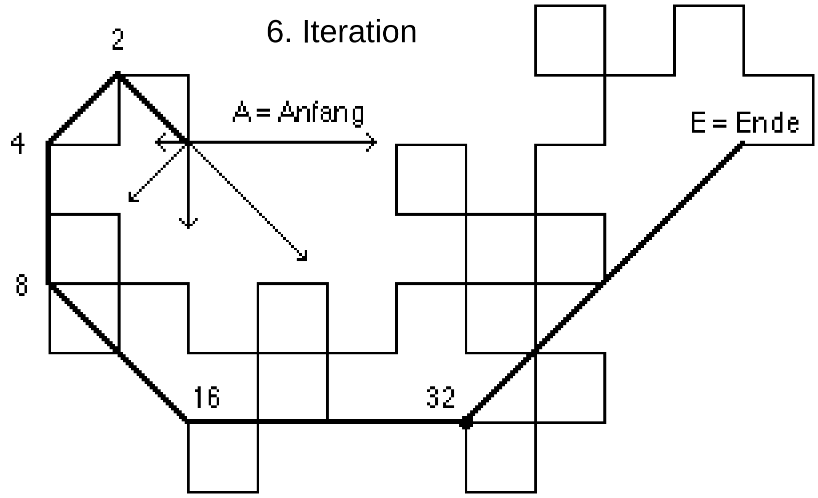
18. Die erste Hälfte (bis zum mittleren **L**) ist **fett** gezeichnet





Die beiden Hälften jedes Linienzugs sind kongruent (um 90° gedreht).

20.

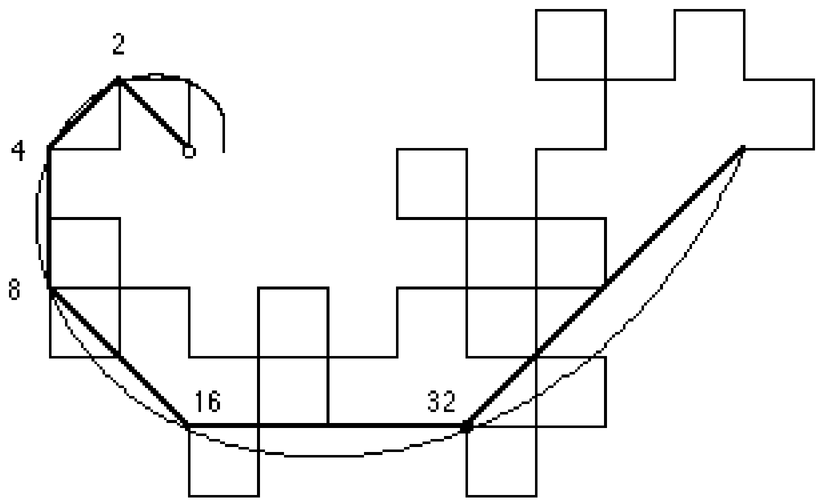


A L**L**R**L**LRR**L**LLRRLRR**L**LLRLLRRRLLRRLRR**L**LLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRR**L**
LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRRLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRR **E**

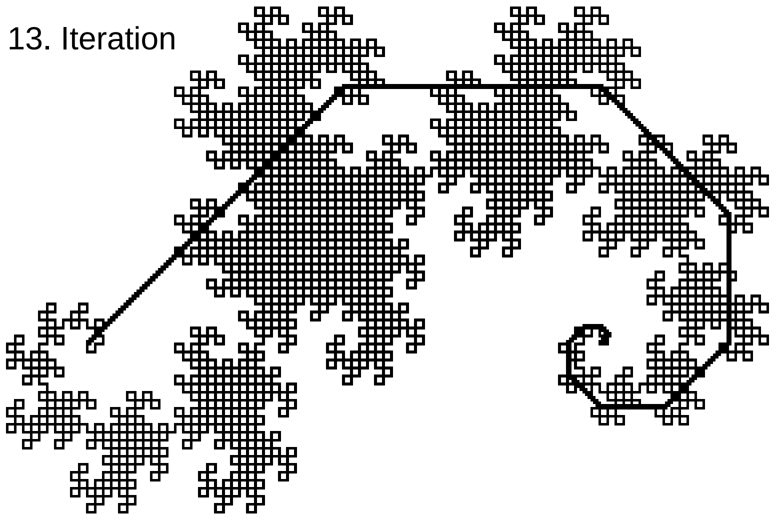
Für die Abstände r der Punkte 2 bis E vom Punkt A gilt (Kantenlänge K=1):

$AP_2 = \sqrt{2}$ $AP_4 = 2\sqrt{2}$ $AP_8 = 4$ $AP_{16} = 4\sqrt{2}$ $AP_{32} = 8$ $AP_{64} = 8\sqrt{2}$

Der Abstand r nimmt jeweils um denselben Faktor ($\sqrt{2}$) zu, der Winkel um konstant 45°.

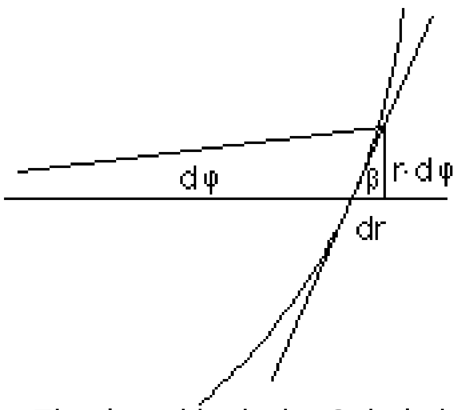


Logarithmische Spiralen besitzen ebenfalls die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit.



21. Es entsteht eine logarithmische Spirale; in Polarkoordinaten (r,ϕ) gilt:

$$r = r_0 \cdot e^{a\phi} \qquad \text{mit} \quad e^{a\,45^\circ} = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad a = \frac{\ln \sqrt{2}}{45^\circ} = 0{,}007701635 \;\; \text{Grad}^{-1}$$



Es gilt:

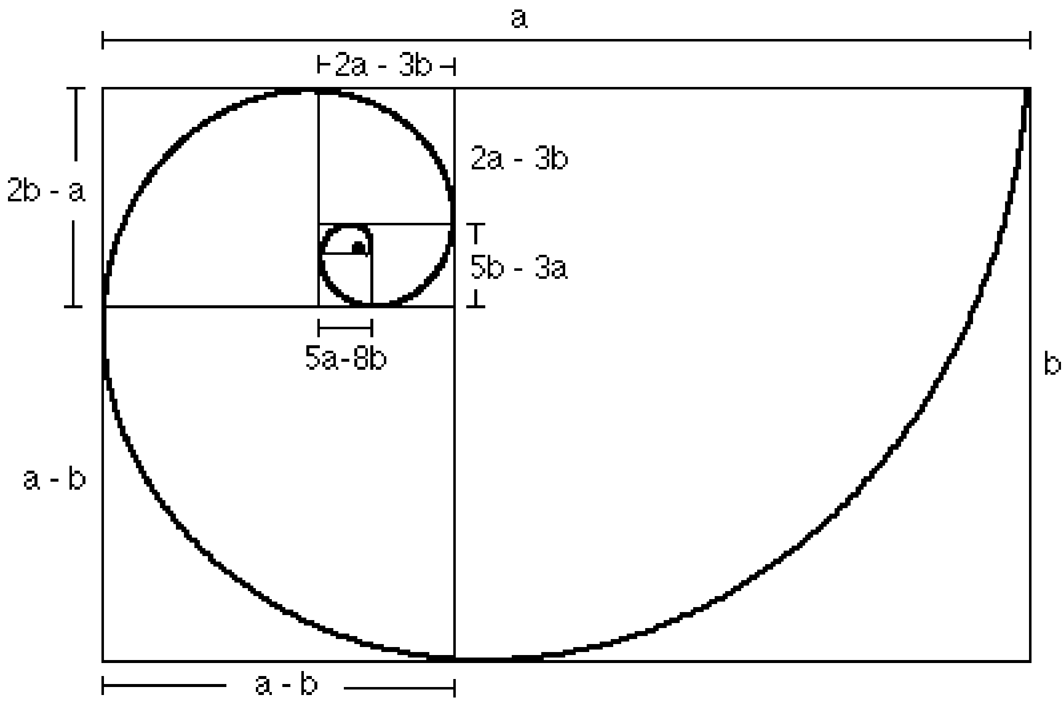
$$\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\phi} = a = \cot\beta$$

mit $a = 0{,}4412712 \text{ rad}^{-1}$ folgt

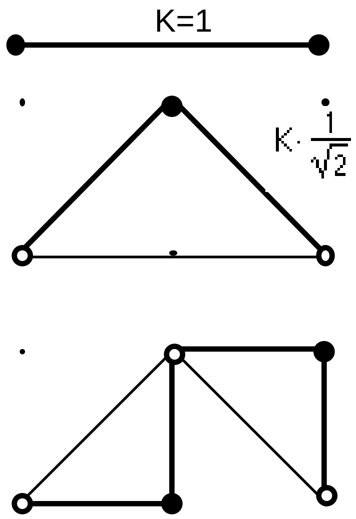
$\beta = 66{,}19\,°$

21a. Eine logarithmische Spirale besonderer Art erhält man durch folgende Konstruktion:

- von einem Rechteck (a>b) wird das Quadrat (b) abgeschnitten,
- von dem verbleibenden Rechteck (b>a-b) das Quadrat (a-b)
- von dem verbleibenden Rechteck (a-b>2b-a) das Quadrat (2b-a)



22.



Initiator
(0. Schritt)

Generator
(1. Schritt)

2. Schritt

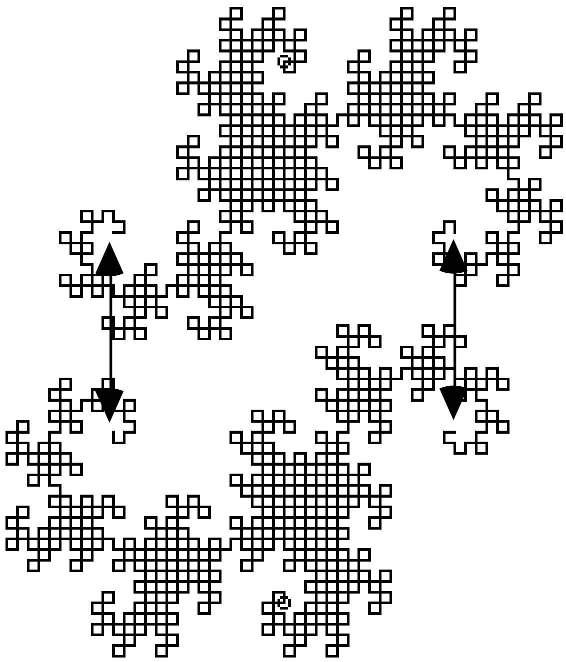
Schritt	Anzahl	Länge	Gesamtlänge
0	1	1	1
1	2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\,\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	4	$\frac{1}{2}$	2
3	8	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$
4	16	$\frac{1}{4}$	4
n	2^n	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$	$(\sqrt{2})^n$

23. Welche Dimension hat die Drachenkurve ?

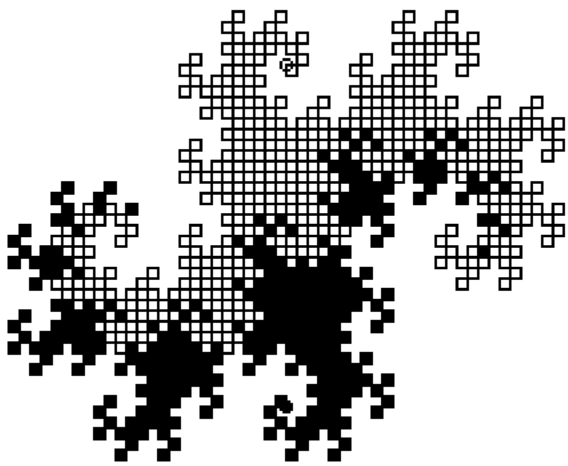
Der Verkleinerungsfaktor beträgt $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Anzahl der Teile, in die die Struktur zerlegt werden kann, ist a=2.

Aus $a = \frac{1}{s^D}$ folgt $D = \frac{\log a}{\log \frac{1}{s}} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = \mathbf{2}$

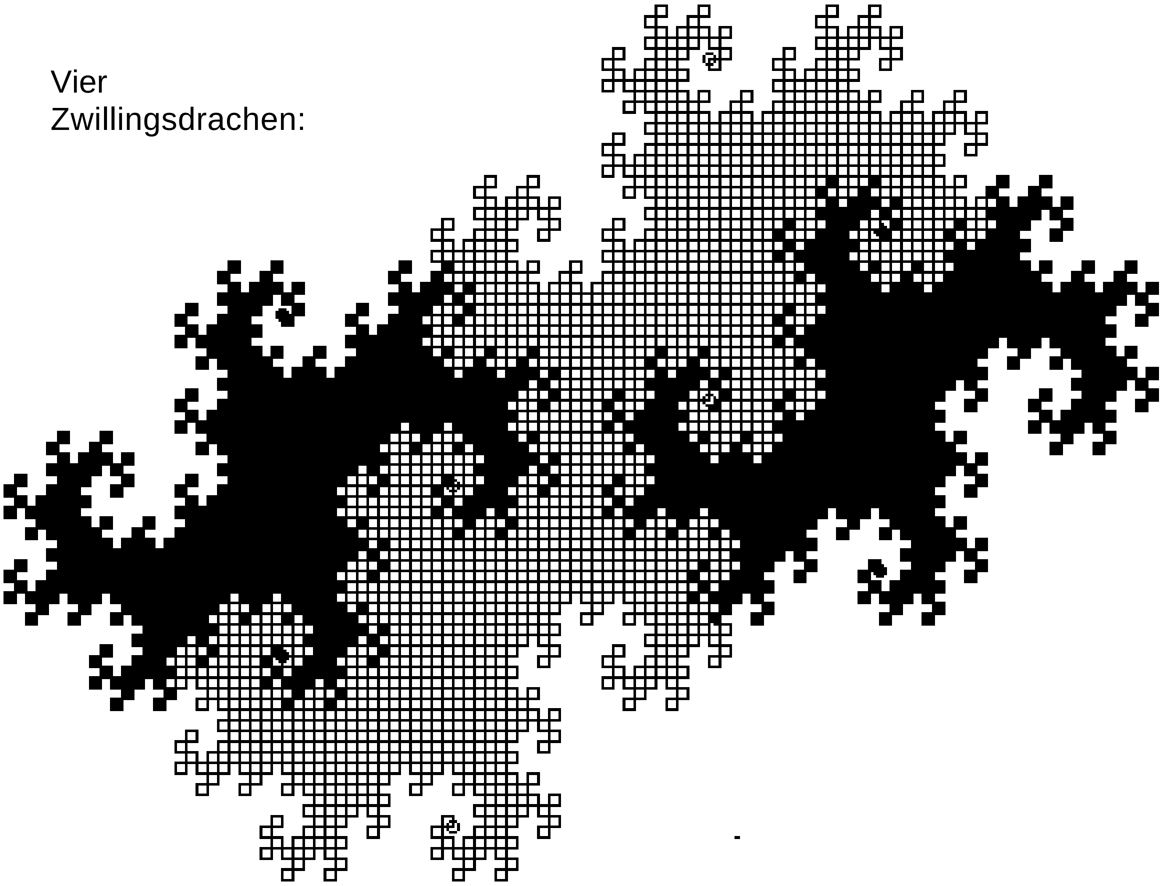
Die Dimension der Drachenkurve beträgt also **2**, d.h. sie ist flächenfüllend !
Aneinander gelegte Drachen füllen (parkettieren) die gesamte Ebene.
Zwei Drachen, der eine um 180° gedreht, lassen sich an den freien Enden zusammenfügen ("Zwillingsdrachen"):



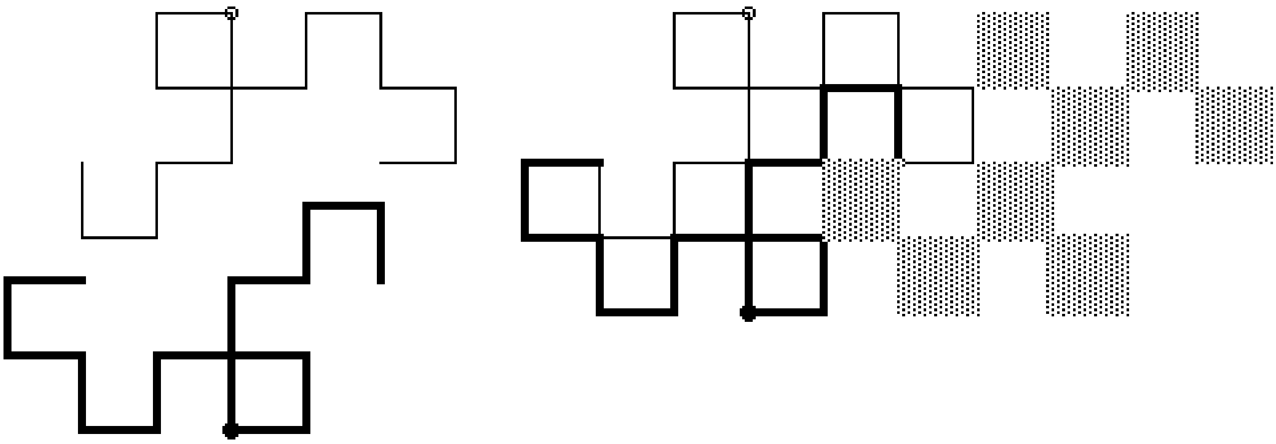
Zwillingsdrachen



Vier
Zwillingsdrachen:



24.



25. In welchem Verhältnis stehen die Anzahlen von L und R ?

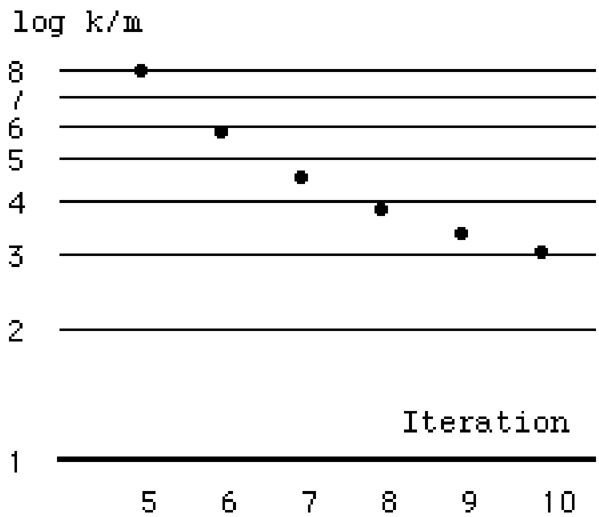
Iteration	Anzahl L	Anzahl R	Verhältnis L:R
1	1	0	-
2	2	1	2
3	4	3	1,33
4	8	7	1,14
5	16	15	1,07
n	2^{n-1}	$2^{n-1} - 1$	

Das Verhältnis L:R = $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$ nähert sich für $n \to \infty$ dem Wert 1.

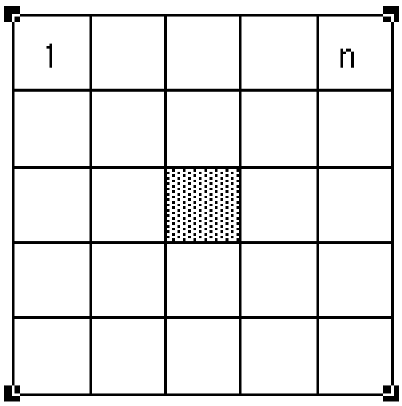
26. In der 4. Iteration tritt erstmals eine geschlossene Masche auf. Zähle in den

Zeichnungen der folgenden Iterationen die Maschen und bilde das Verhältnis, in dem die Anzahl k der Kanten (Geradenstücke) zur Anzahl m der Maschen steht.

Iteration	Kantenzahl k	Maschenzahl m	$\frac{k}{m}$
3	8	0	-
4	16	1	16
5	32	4	8
6	64	11	5,82
7	128	28	4,57
8	256	67	3,82
9	512	152	3,37
10	1024	335	3,06



Das Verhältnis wird kleiner und scheint gegen **2** zu konvergieren.



1. Begründung:
n^2 Maschen haben je n(n+1) senkrechte und waagerechte Kanten, also

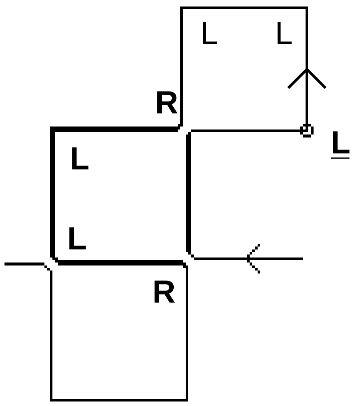
$$\frac{k}{m} = \frac{2n(n+1)}{n^2} \to 2$$

2. Begründung:
Auf eine Masche im Inneren kommen 4 Kanten, die je zur Hälfte gezählt werden, da sie mit den Nachbarmaschen gemeinsam sind.

27. In der Zeichnung der Zeichnung des 5. Drachens kommen 4 geschlossene Maschen vor, die entsprechende Symbolfolge

LLRLLRR**LLL**RRLRR**LLL**RLL**RRR**LLRRLRR

enthält jedoch nur insgesamt drei LLL- und RRR-Sequenzen. Erkläre.



Eine geschlossene Masche kann auch ohne LLL- oder RRR-Sequenz (fett) entstehen, z.B. durch die Folge RLLR, die durch ein vorhergehendes Kantenstück geschlossen wird.

LLRLLRRLLLRRL RR<u>**L**</u>LL **RLLR** RRL LRRLRR

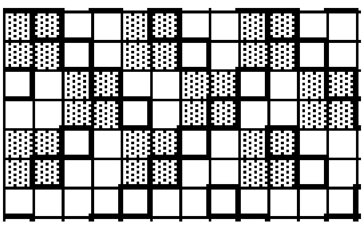
28. Bestimme in den Symbolfolgen die Anzahl der **LLL**- und **RRR**-Sequenzen (Zählen oder aufgrund des Bildungsgesetzes):

Iteration	Kantenzahl k	LLL	RRR	Verhältnis k/s
3	8	0	0	-
4	16	1	0	16
5	32	2	1	10,67
6	64	4	3	9,14
7	128	8	7	8,53
8	256	16	15	8,26
9	512	32	31	8,13
10	1024	64	63	8,06

Begründe das Ergebnis für das Verhältnis von Kantenzahl k zur Summe s von LLL- und RRR-Sequenzen.

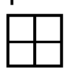
Für die i-te Iteration gilt: $\frac{k}{s} = \frac{2^{i}}{2^{i-3} - 1} \rightarrow 2^3 = 8$

Ausschnitt 12. Iteration



LLL- oder RRR-Sequenz **fett** gezeichnet

In jeweils 4 Zellen kommt genau <u>eine</u> LLL- oder RRR-Sequenz vor;



den 4 Zellen entsprechen **8** Kanten (4 innere und 8 äußere, die mit den Nachbarn geteilt und daher zur Hälfte gezählt werden)

29. Jede Drachenkurve kann durch ein Rechteck eingeschlossen werden. Untersuche das Verhältnis der Seitenlängen.

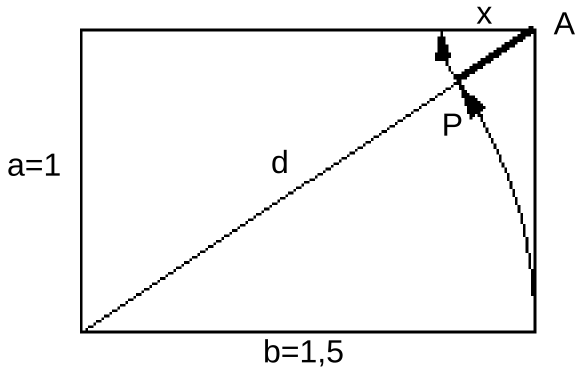
Iterat.	a	b	a / b	a
2	1	2	0.5000	
3	2	3	0,6667	
4	3	5	0,6000	
5	6	7	0,8571	2^2+2^1
6	7	11	0,6363	
7	12	15	0,8000	2^3+2^3
8	15	23	0,6522	
9	26	31	0,8387	$2^4+2^3+2^1$

10	31	47	0,6596		
11	52	63	0,8254	$2^5+2^4+2^2$
12	63	95	0,6632	
13	106	127	0,8346	$2^6+2^5+2^3+2^1$

Für gerade Iterationen gilt: $\frac{a}{b} = \frac{2^{i/2} - 1}{3 \cdot 2^{i/2-1} - 1} \rightarrow \frac{2}{3}$

für ungerades i: $a = 2^{(i+1)/2}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + ...\right)$ und $b = 2^{(i+1)/2} - 1$

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{5}{6} = 0{,}8333333...$$



Bei gerader Iteration beträgt die Diagonale d mit a=1

$$d = \frac{\sqrt{13}}{2}$$
$$= 1{,}8027756377319946466...$$

Der Punkt P trennt hiervon die Strecke

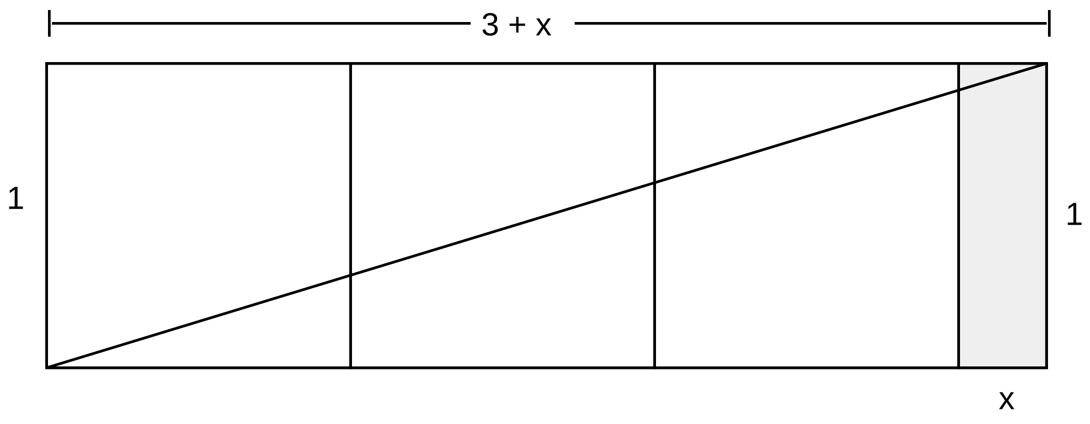
$$x = \overline{AP} = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$
$$= 0.3027756377319946466....$$

Die Zahl x ist ein "silbernes Mittel", sie löst die Gleichung

$$\frac{1}{x} = x + 3$$

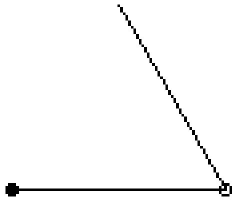
und hat die Kettenbruchdarstellung

$$x = [\,3, 3, 3, 3, 3, ...\,] = [\,\overline{3}\,]$$

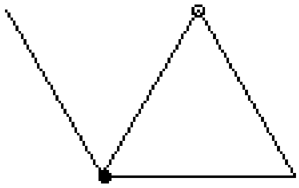


Das kleine Rechteck (1, x) ist dem ganzen (3+x, 1) ähnlich.

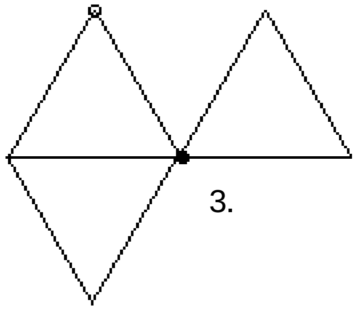
30. Mit der Kantenlänge $K_1 = 80$ Pixel und Skalierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$



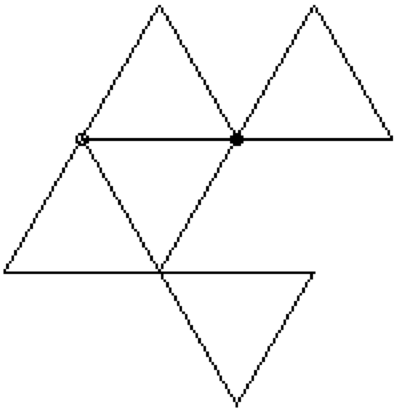
1.



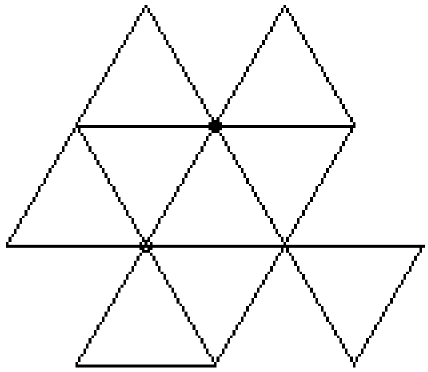
2.



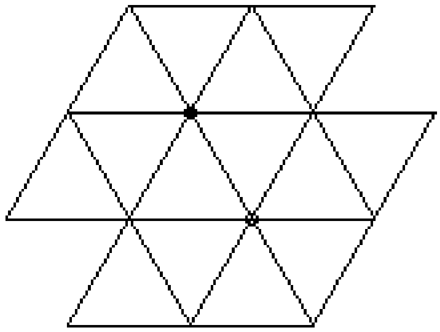
3.



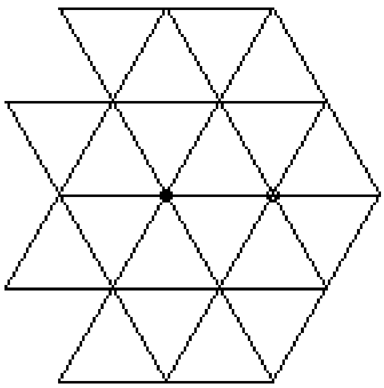
4.



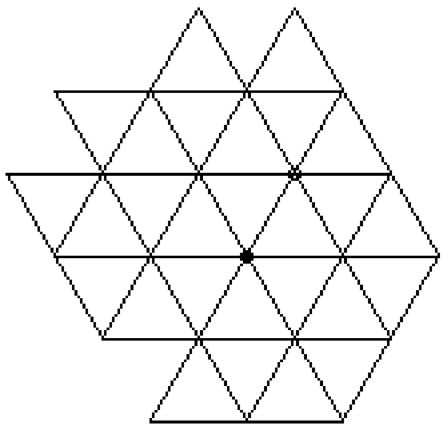
5.



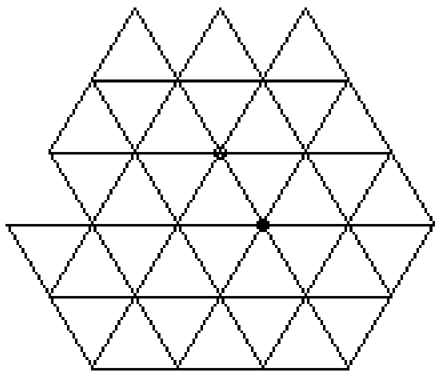
6.



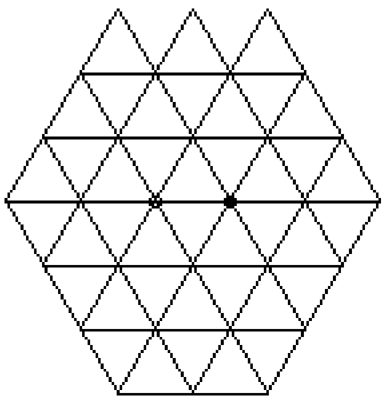
7.



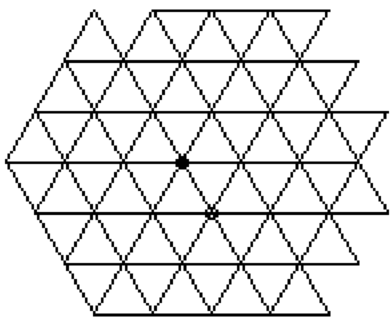
8.



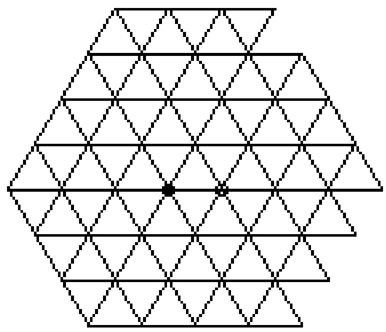
9.



10.



11.



13.

32.

Stufe **1**

L
P_1 = 0.1
P_1 = 0.5

Stufe **2**

LLR
P_2 = 0.110
P_2 = 0.75

Stufe **3**

LLRLLRR
P_3 = 0.1101100
P_3 = 0.84375

Stufe **4**

LLRLLRRLLLRRLRR
P_4 = 0.110110011100100
P_4 = 0.8507080078125

Stufe **5**

LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRR
P_5 = 0.1101100111001001110110001100100

P_5 = 0.850736187709627152

Stufe **6**

LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRR
P_6 = 0.110110011100100111011000110010011101100111001000110110001100100

P_6 = 0.850736188201867260 2

Stufe **7**

LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLR
RLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRRLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRR

P_7 = 0,111011001110010001101100011001001110110011100100111011000110010001101100111001000110110001100100

P_7 = 0.850736188201867260 4

Stufe **8**

LLRLLRRLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLR
RLLLRRLRRLLLRLLRRRLLRRLRRRLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLRRLLLRR
LRRLLLRLLRRRLLRRLRRLLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRRRLLRLLRRLLLRRLRRLLL
RLLRRRLLRRLRRRLLRLLRRLLLRRLRRRLLRLLRRRLLRRLRR

P_8 = 0.1101100111001001110110001100100111011001110010001101100011001001110110011100100111011000110010001101100111001000110110001100100111011001110010011101100011001000110110011100100111011000110010001101100111001000110110001100100

P_8 = 0.850736188201867260 4

33. Die Folge konvergiert (gegen P, "Papierfaltungszahl").

34. Die Zahl P ist irrational (weder endlich noch periodisch) und sogar transzendent (nicht Lösung einer algebraischen Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 = 0$ mit ganzen a_i).

35. Mit L=0 ind R=1 erhält man 1 - P = 0.1492638117981327396...

P = 0, 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 ..

36. Alternierendes Einfüllen von 1 und 0 in P ergibt eine Zahl Q_1:

0	**.**	1	**1**	0	**1**	1	**0**	0	**1**	1	**1**	0	**0**	1	**0**	0	**1**	1	**1**	0	**1**	1	**0**

Q_1 = 0, 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1.

P und Q_1 sind gleich; das alternierende Einfüllen von 0 und 1 in P ändert den Wert von P nicht !
Dem Einfüllen von 1-0 entspricht das Hinzufügen von L- und R-Ecken.

37. Weglassen von 1-0 ergibt eine Zahl Q_2:

0	**.**	1	**1**	**0**	1	**1**	**0**	0	1	1	**1**	**0**	0	**1**	**0**	0	1	1	**1**	**0**	1	**1**	**0**

Q_2 = 0, 1 1 0 1 1 0 0 1 1 1

P und Q_2 sind gleich; Weglassen (Dezimation) von 1-0 (entsprechend dem Weglassen von L- und R-Ecken) in P ändert den Wert nicht.

38. Nullen in P einfüllen ergibt eine Zahl R:

0	**.**	0	**1**	0	**1**	0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**0**

R = 0, 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 .

P ≠ R

39. Differenz von P und R:

$$
\begin{aligned}
P &= 0{,}1101100111001001...\\
R &= 0{,}0101000101000001010100000 1.\\
P-R &= 0{,}1000100010001000...\\
&= 0{,}\overline{1000}
\end{aligned}
$$

P - R ist periodisch, also rational.

40. Dezimaler Wert von P - R: $P - R = \frac{1}{2} + 2^{-5} + 2^{-9} + 2^{-13} + 2^{-17} + ... = 0{,}5\overline{3}$

41. $P - R = s^1 + s^5 + s^9 + s^{13} + s^{17} + ... = s\left(1 + (s^4)^1 + (s^4)^2 + (s^4)^3 + (s^4)^4 + ...\right)$

$= \frac{s}{1 - s^4} = \frac{8}{15} = 0{,}5\overline{3}$ (s = Basis $= \frac{1}{2}$)

42. Zeige: Bei der Subtraktion in **39** steht über einer 1 in R immer eine 1 in P (d.h. es tritt kein Übertrag auf).
Hinweis: in R steht eine 1 stets an ungerader Position 2k+1 (k=0,1,..); benutze den Automaten für P.

```
             ↓   ↓       ↓   ↓           ↓   ↓   ↓         ↓
P = 0,0101000101000001010100000100000..
Position      0 1 2 3 4 5 6 7 8
R = 0,0101000101000000101010000001...
Position      0 1 2 3 4 5 6 7 8
```

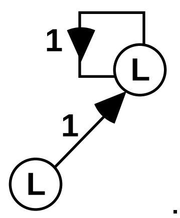
Die **1** in R an der ungeraden Position 2k+1 stand vor dem Einfüllen der Nullen auf Position k in P. Der Automat für P zeigt, daß bei einer 1 an der Stelle k auch an der Stelle 2k+1 eine 1 steht:
Es sei $k = a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n$ die Binärdarstellung von k; dann gilt;

$$2k = a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n\, \mathbf{0}$$

(d.h. der Multiplikation einer Dualzahl mit 2 entspricht das Anhängen von 0)

Dann ist $$2k+1 = a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n\, \mathbf{1}$$

Also entspricht dem Übergang von Position k nach 2k+1 ein weiterer 1-Schritt von L aus; dies führt stets zu L (also 1)



45. π $= 3.14159265358979323846 \ldots$
$= [\,3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 15, 198, \ldots]$

46. $\sqrt{2} = 1.414213562373095049\ldots$
$= [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] = [\,1,\overline{2}\,]$

$\sqrt{3} = 1.732050807568877294\ldots$
$= [\,1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2,\ldots] = [\,1, \overline{1,2}\,]$

$\sqrt{5} = 2.236067977499789696\ldots$
$= [2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,\ldots] = [\,2, \overline{4}\,]$

Jede Quadratwurzel kann in einen periodischen Kettenbruch entwickelt werden.

e $= 2.718281828459045235\ldots$
$= [\,2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14,\ldots] = [\,2, \overline{1,2n,1}\,]$
(n=1,...,∞)

$\sqrt[3]{2} = 1.259921049894873165\ldots$
$= [\,1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 11\ldots]$ nicht-periodisch

47. P **=** $0.8507361882018672604\ldots$
$= [\,1, 5, 1, 2, 3, 21, 1, 4, 107, 7, 5, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 12\ldots]$

48. Komplexe Zahlenebene

In **31** wurde die Faltenfolge als reelle Zahl P im Dualsystem (Basis 2) betrachtet:

$$P = 0.110110011100100....$$

Ein geeignetes komplexes Zahlsystem erweckt den Drachen in der Gaußschen Zahlenebene zum Leben: die Darstellung ihrer Punkte durch komplexe Zahlen der Form z = x + i y mit Real- und Imaginärteil erfordert für ihre beiden Komponenten *zwei* Binärzahlen; es genügt jedoch eine einzige Binärzahl, wenn man eine *komplexer* Basis benutzt. Um sie als zweistellige Binärzahl schreiben zu können, darf der Betrag der Basis b nicht größer als 2 sein.

$$b = 1 - i \quad \text{mit} \quad |b| = \sqrt{2}$$

erfüllt diese Bedingung.

Die Eulerschen Formel $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$ liefert

$$b = \sqrt{2}\ \exp(-i\,\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,(\cos\tfrac{\pi}{4} - i \cdot \sin\tfrac{\pi}{4})$$

In der Darstellung einer beliebigen Zahl

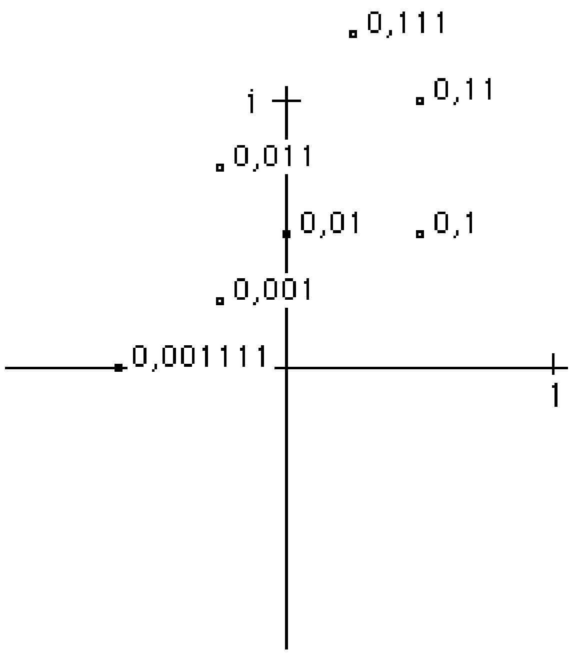
$$0, a_1 a_2 a_3 .... = a_1 b^{-1} + a_2 b^{-2} + a_3 b^{-3} + ...$$

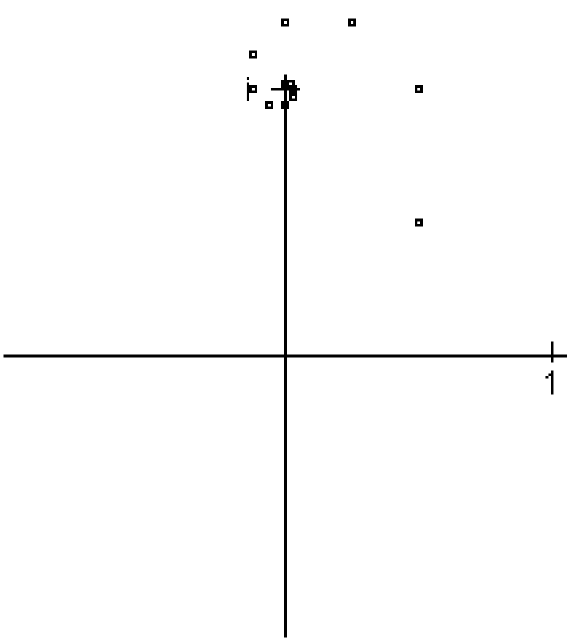
gilt dann für die Potenzen der komplexen Basis b:

$$b^{-n} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\ \exp(i\,n\,\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\ (\cos n\tfrac{\pi}{4} + i \cdot \sin n\tfrac{\pi}{4})$$

Beispiele:

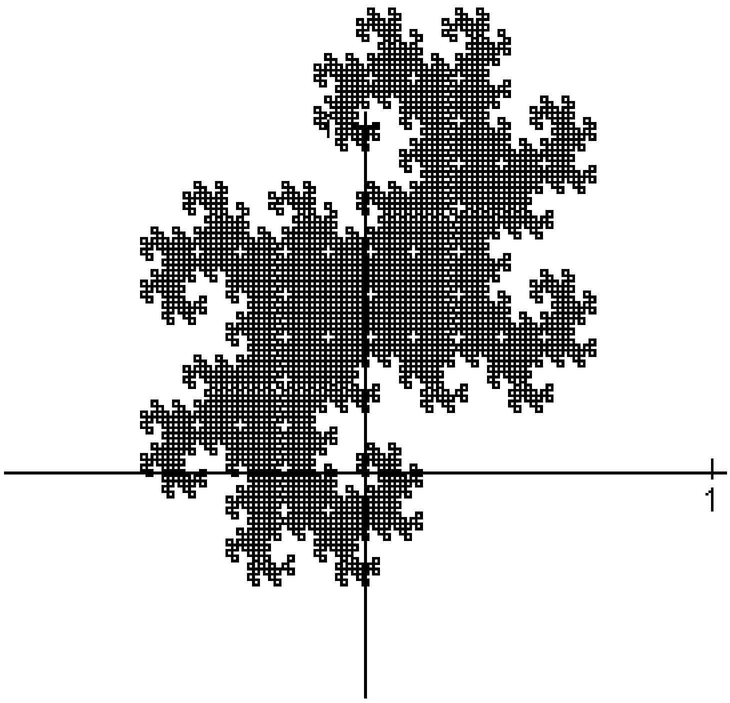
z (binär)	x=Re(z)	y=Im(z)
0,1	0,5	0,5
0,01	0	0,5
0,11	0,5	1
0,001	-0,25	0,25
0,011	-0,25	0,75
0,111	0,25	1,25
0,001111	-0,625	0

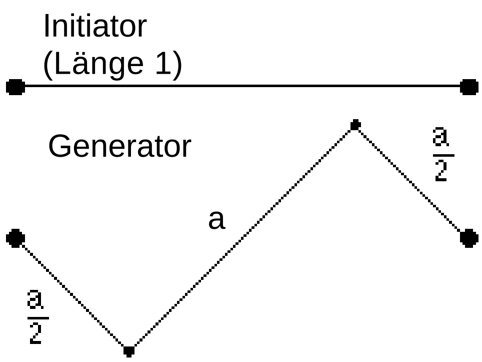




Die Folge 0,1, 0,11, 0,111, 0,111, ... bildet eine Spirale und konvergiert gegen $i = 0,\overline{1}$.

Die Menge aller durch Binärzahlen < 1 dargestellten komplexen Zahlen (also die Menge aller echten Brüche) bildet ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit fraktalem Rand: den (gespiegelten) Zwillingsdrachen.
Mit 2000 Punkten (2x2 Pixel) erhält man das folgende Bild:





Der Generator des Zwillingsdrachens besteht aus Teilstrecken unterschiedlicher Länge. Seine Dimension D ist gegeben durch die Bedingung

$$\left(\frac{a}{2}\right)^D + x^D + \left(\frac{a}{2}\right)^D = 1$$

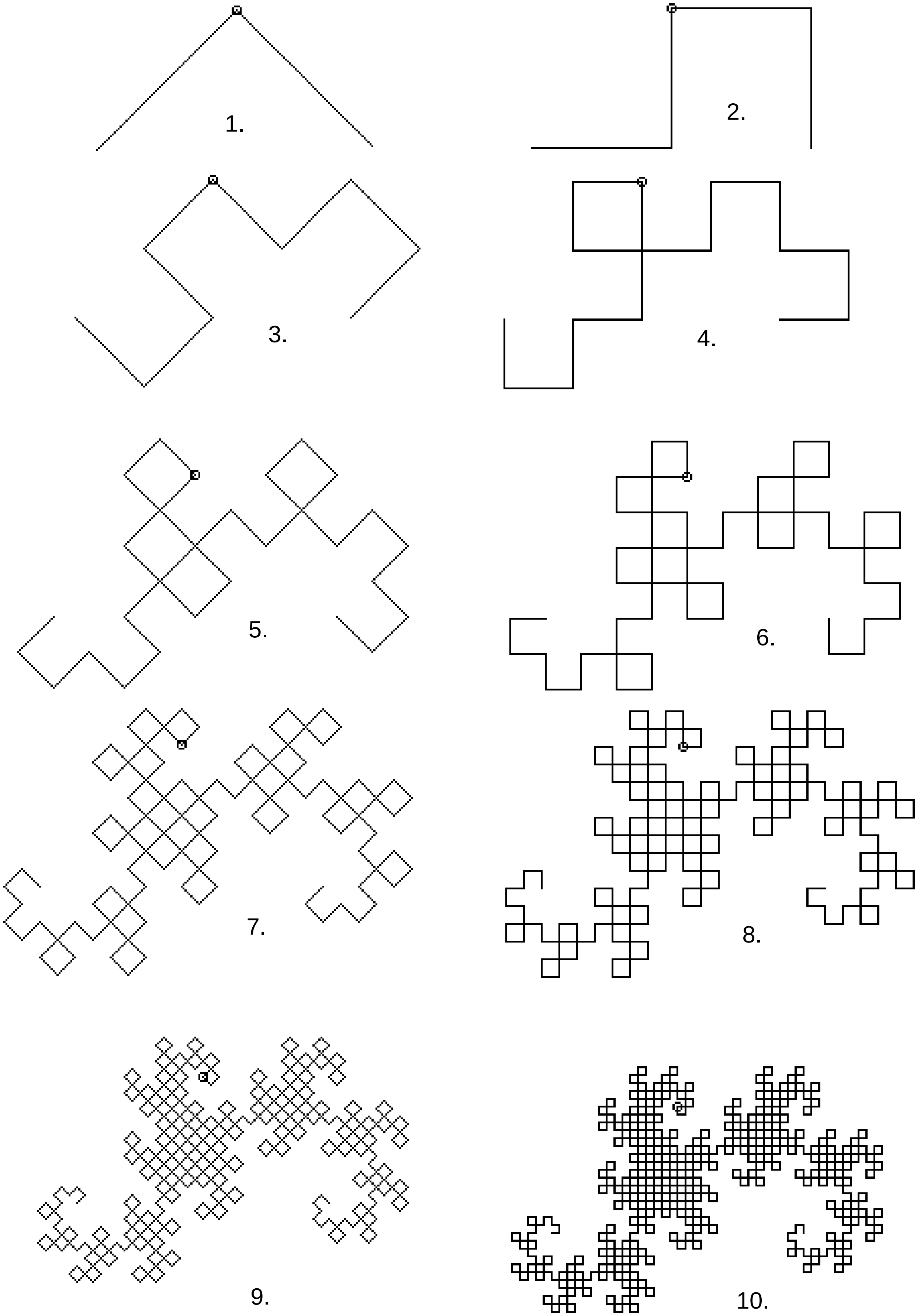
Wegen $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und mit $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^D$
erhält man die kubische Gleichung

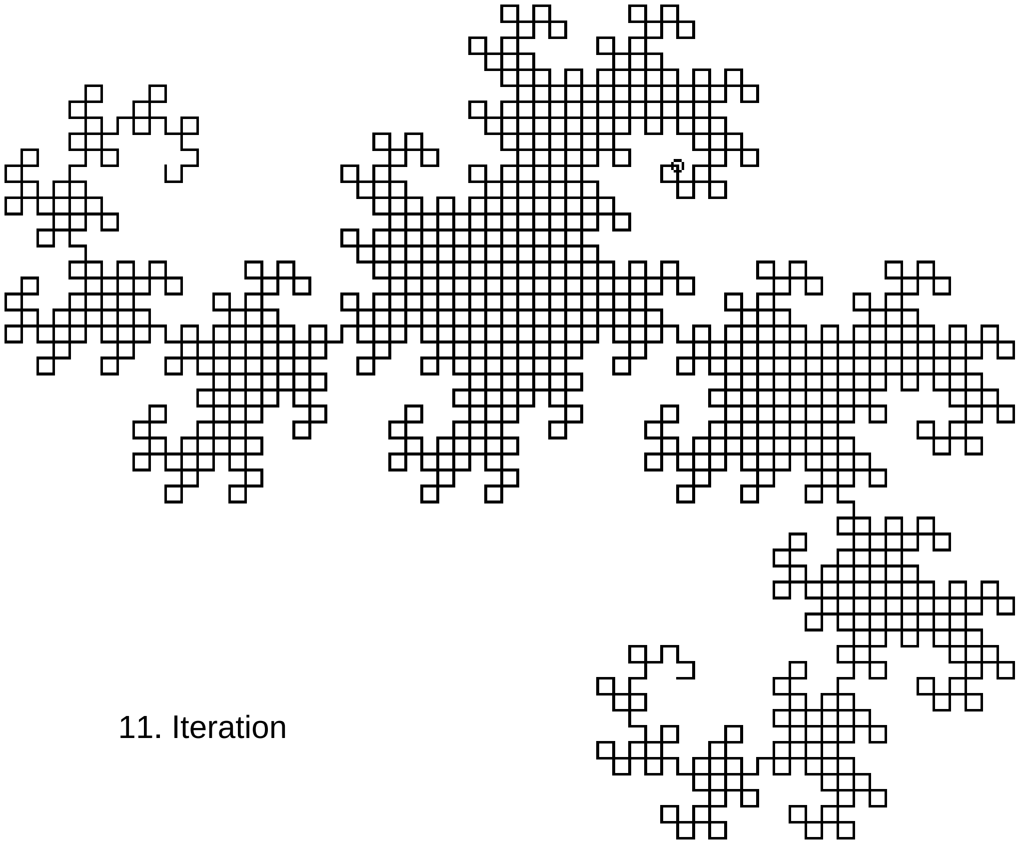
$$2\,x^3 + x = 1$$

mit der Lösung x=0,5897545...
Die Dimension beträgt also

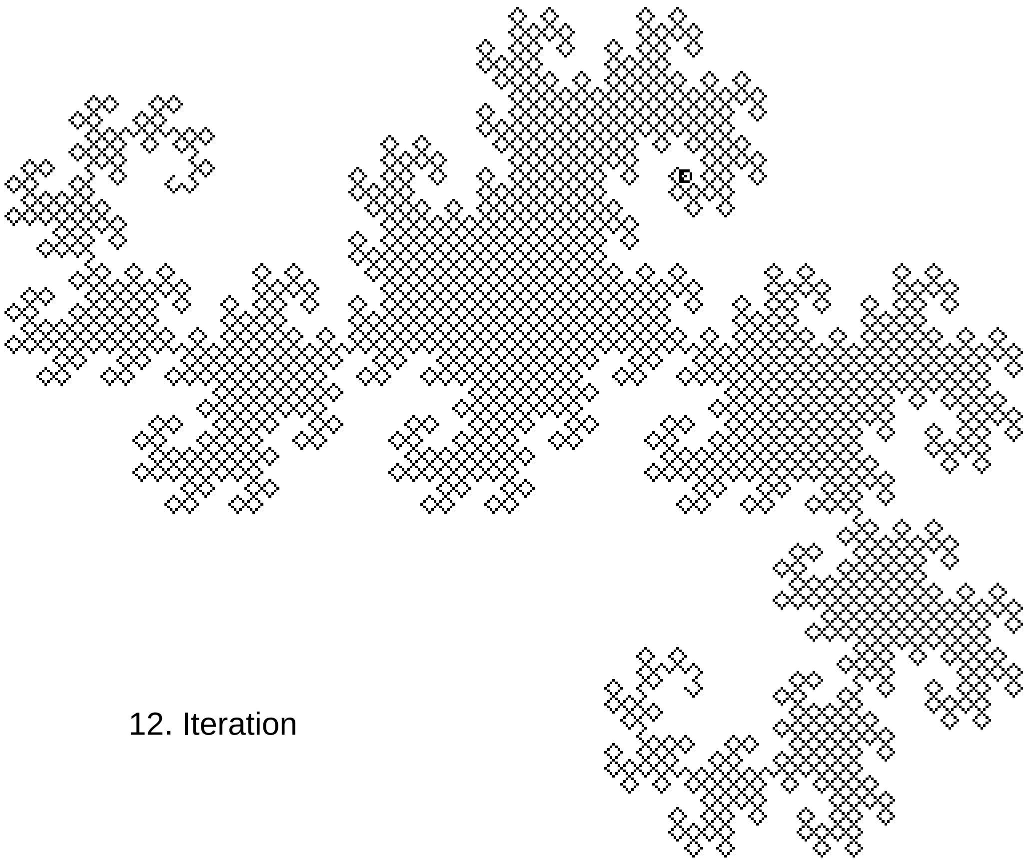
D = 1,523627...

Anhang 1

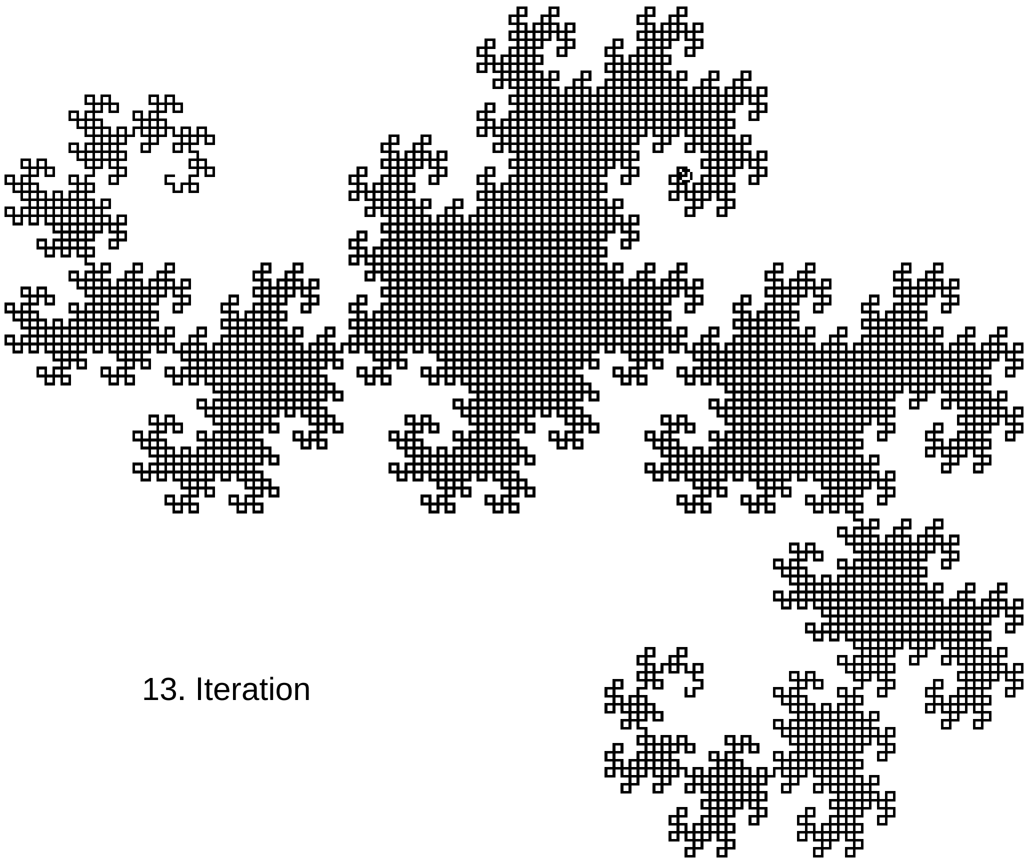




11. Iteration

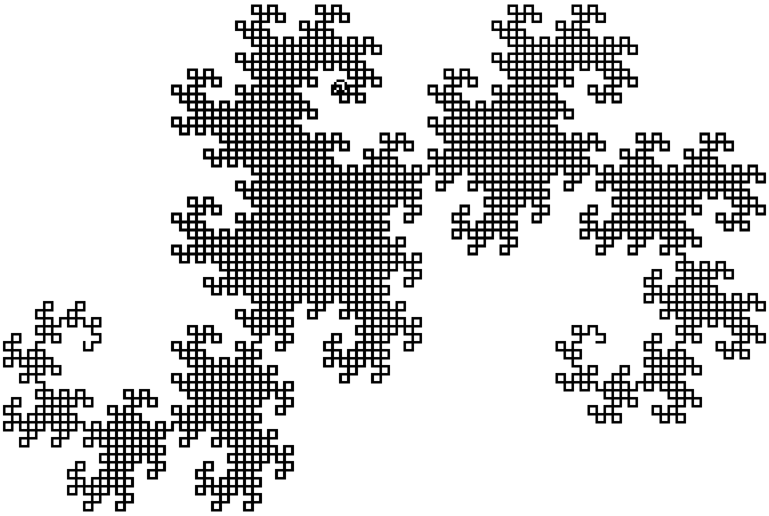


12. Iteration

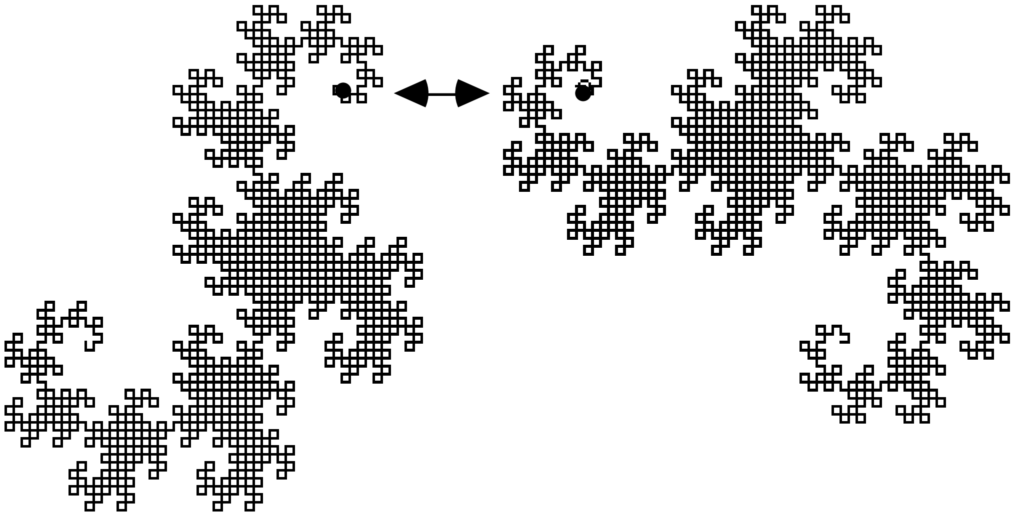


13. Iteration

Die 12. Iteration:



Der Linienzug läßt sich an der mittleren Falte (•) auftrennen:



Die beiden Hälften sind untereinander und dem Ganzen ähnlich (Selbstähnlichkeit).

Anhang 2: HyperCard-Programm

```
on mouseUp
  global x,y,phi,phi0,a,feld,rad,N,x1,y1
  ask "Bis zu welcher Iteration zeichnen ?"
  if the result is "cancel" then exit MouseUp
  put it into maxIter
  AnfangswerteFestlegen

  repeat with z=1 to maxIter
    ErzeugeFaltenfolge
    go to card z+3
    put feld into fld "feld"
    put z & ". Iteration" into fld "Iteration"
    choose select tool
    doMenu "alles auswählen"
    doMenu "löschen (grafik)"
    -- Startpunkt
    put 250 into x
    put 180 into y -- 200
    choose oval tool
    set filled to TRUE
    drag from x-rad,y-rad to x+rad,y+rad
    set filled to FALSE
    -- Zeichnen der Drachenkurve
    put phi0 into phi
    choose line tool
    get feld
    -- 1. Hälfte zeichnen
    repeat with i=1 to (N div 2)+1
      do char i of it
    end repeat
    -- Mitte markieren
    choose oval tool
    drag from x-rad,y-rad to x+rad,y+rad
    choose line tool
    -- 2. Hälfte zeichnen
    repeat with i=(N div 2)+2 to N
      do char i of it
    end repeat
    LetzteKante
    -- Kantenlänge und Anfangswinkel für die nächste Iteration
    divide a by sqrt(2)
    add 45 to phi
    subtract 45 from phi0
  end repeat
  choose browse tool
end mouseUp

on AnfangswerteFestlegen
  global a,k,phi0,feld,rad
  put 2 into rad -- Radius für Kreismarkierung der mittleren Falte
  put empty into feld -- Faltenfolge löschen
  put 45 into phi0 -- Anfangswinkel für die 1.Iteration
  put pi/180 into k
  put 82 into a -- Kantenlänge
end AnfangswerteFestlegen

on ErzeugeFaltenfolge
  global feld,N
```

```
  put the length of feld into N
  put feld into feld1
  put "L" after feld1
  repeat with i=0 to N-1
    get char N-i of feld
    if it=L then put  R after feld1
    else put L after feld1
  end repeat
  put feld1 into feld
  put the length of feld into N
end ErzeugeFaltenfolge

on L
  global k,a,x,y,phi,x1,y1
  put k*phi into kphi
  put x-round(a*sin(kphi)) into x1
  put y-round(a*cos(kphi)) into y1
  drag from x,y to x1,y1
  put x1 into x
  put y1 into y
  add 90 to phi
end L

on R
  global k,a,x,y,phi,x1,y1
  put k*phi into kphi
  put x-round(a*sin(kphi)) into x1
  put y-round(a*cos(kphi)) into y1
  drag from x,y to x1,y1
  put x1 into x
  put y1 into y
  subtract 90 from phi
end R

on LetzteKante
  global a,N,k,phi,x1,y1
  if N=1 then
    add 90 to phi
    put k*phi into kphi
    put x1+round(a*cos(kphi)) into x2
    put y1-round(a*sin(kphi)) into y2
  else
    subtract 270 from phi
    put k*phi into kphi
    put x1+round(a*cos(kphi)) into x2
    put y1-round(a*sin(kphi)) into y2
  end if
  drag from x1,y1 to x2,y2
end LetzteKante
```

Anhamg 3: Computer-Chaos

```
y1 = 4*x1*(1-x1)
y2 = 4*(x2-x2*x2)
```

	y1	y2	y2 -y1 .
1	0.64000000	0.64000000	-.00000000
2	0.92160000	0.92160000	0.00000000
21	0.59036448	0.59036448	-.00000000
22	0.96733704	0.96733704	0.00000000
23	0.12638436	0.12638436	-.00000000
24	0.44164542	0.44164542	-.00000000
25	0.98637897	0.98637897	-.00000000
26	0.05374198	0.05374198	0.00000000
27	0.20341513	0.20341513	0.00000000
28	0.64814966	0.64814966	0.00000000
29	0.91220672	0.91220672	-.00000000
30	0.32034249	0.32034249	0.00000000
31	0.87089272	0.87089272	0.00000000
32	0.44975436	0.44975436	-.00000000
33	0.98990150	0.98990150	-.00000000
34	0.03998608	0.03998608	0.00000000
35	0.15354877	0.15354877	0.00000000
36	0.51988617	0.51988617	0.00000000
37	0.99841816	0.99841816	-.00000000
38	0.00631735	0.00631735	0.00000000
39	0.02510975	0.02510976	0.00000001
40	0.09791701	0.09791703	0.00000003
41	0.35331706	0.35331714	0.00000008
42	0.91393646	0.91393656	0.00000010
43	0.31462642	0.31462610	-.00000032
44	0.86254655	0.86254607	-.00000048
45	0.47424000	0.47424138	0.00000139
46	0.99734569	0.99734597	0.00000029
47	0.01058906	0.01058793	-.00000114
48	0.04190774	0.04190329	-.00000445
49	0.16060592	0.16058960	-.00001632
50	0.53924664	0.53920233	-.00004431
51	0.99383880	0.99385271	0.00001390
52	0.02449294	0.02443801	-.00005493
53	0.09557215	0.09536317	-.00020898
54	0.34575244	0.34507613	-.00067632
55	0.90483076	0.90399437	-.00083639
56	0.34444821	0.34715418	0.00270597
57	0.90321456	0.90655262	0.00333806
58	0.34967207	0.33885986	-.01081221
59	0.90960606	0.89613542	-.01347063
60	0.32889151	0.37230691	0.04341539
61	0.88288754	0.93477789	0.05189035
62	0.41358852	0.24387273	-.16971579
63	0.97013222	0.73759528	-.23253694
64	0.11590278	0.77419392	0.65829115
65	0.40987729	0.69927077	0.28939348
66	0.96751159	0.84116464	-.12634695
67	0.12573166	0.53442674	0.40869509
68	0.43969284	0.99525920	0.55556636
69	0.98545218	0.01887331	-.96657887
70	0.05734471	0.07406844	0.01672373