Sonnenuhren

Jürgen Giesen
Frankenkamp 12 a
59514 Welver

E-Mail: juergen@giesen.dinet.de
Web: http://www.giesen.dinet.de

Astronomische Grundlagen von Zeitrechnung und Sonnenuhren

1. Geschichtliches

Die Zeitbestimmung war einst eine der wichtigsten Aufgaben der Astronomie. Da unser tägliches Leben durch den Gang der Sonne bestimmt ist, entwickelte sich schon sehr früh die als Gnomonik bezeichnete Lehre von den Sonnenuhren (Gnomon=Schattenstab).

Zeugnisse über die Herstellung einfacher Sonnenuhren sind uns aus der Mitte des 2. Jahrtausends v. Chr. aus Ägypten und China bekannt. In Stonehenge (Südengland) befindet sich eine Anlage aus dem 3. oder 2. Jahrtausend v. Chr. aus großen, Visierlinien bildenden Steinblöcken, die zur Sonnenbeobachtung und kultischen Zwecken gedient hat.

In Griechenland kannte Berosos (7. Jahrh. v. Chr.) bereits den Einfluß der geographischen Breite auf den Sonnenstand, und auch die Form der Stundenlinien (s. Abschn. 7) war bekannt. Die Wissenschaften der Araber schlugen danach mit wertvollen Beiträgen auch zur Gnomonik die Brücke zum Mittelalter in Europa.

Kopernikus begründete 1543 mit seinem Werk "De Revolutionibus Orbium Coelestium" das heliozentrische Weltbild, das Kepler weiterentwickelte (Astronomia Nova, 1609, Harmonices Mundi 1619). Newton schließlich erkannte die Gravitation als Ursache der Kräfte zwischen den Himmelskörpern (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,1686).

2. Bahn der Erde um die Sonne

2.1 Kepler-Ellipse

Die Ebene, in der die Erde um die Sonne läuft, bezeichnet man als Ekliptik. Die Erdbahn in der Ekliptik hat die Form einer Ellipse (große Halbachse a, kleine Halbachse b).. In einem der beiden Brennpunkte F (nicht im Mittelpunkt M) steht die Sonne (1. Keplersches Gesetz).

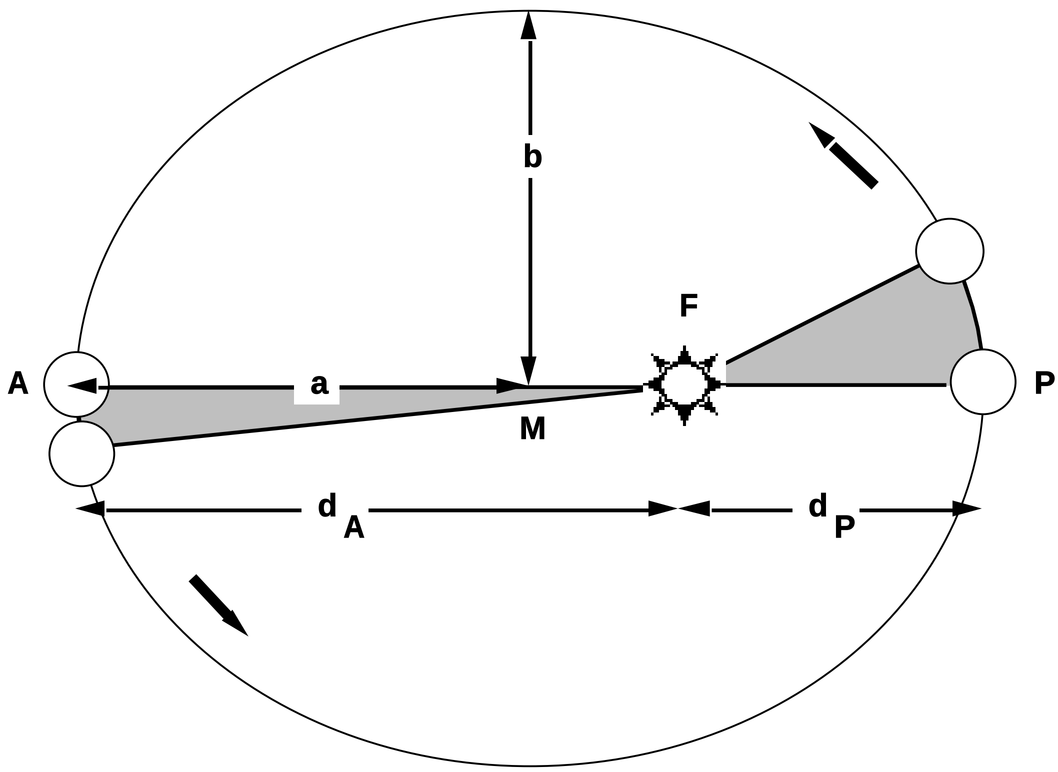


Bild 2.1: Ellipsen-Bahn der Erde

Den sonnennächsten Punkt ihrer Bahn (Perihel P) durch läuft die Erde am 22.12.; daß dieser Zeitpunkt (z. Zt.) ungefähr mit dem Jahresanfang zusammenfällt, ist reiner Zufall. Den sonnenfernsten Punkt (Aphel A) erreicht sie am 2.7.

Für die Abstände gilt

Periheldistanz $d_P = 147{,}1 \cdot 10^6$ km

Apheldistanz $d_P = 152{,}1 \cdot 10^6$ km

Die Erdbahn weicht also nur wenig von der Kreisform ab. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne wird als astronomische Einheit (AE) bezeichnet und beträgt

$$1\ \mathrm{AE} = 149{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{km}$$

Das Verhältnis der Entfernung $\overline{MF}$ zwischen Mittelpunkt M und Brennpunkt F zur großen Halbachse a nennt man numerische Exzentrizität der Bahn:

$$\frac{\overline{MF}}{a} = e = 0{,}01674$$

Nach dem 2. Keplerschen Gesetz überstreicht der von der Sonne zum Planeten (Erde) gezogene Fahrstrahl in gleichen Zeitintervallen gleich große Flächenstücke; die beiden gekennzeichneten Flächen in Bild 2.1 sind also gleich groß. Hieraus folgt, daß die Bahngeschwindigkeit der Erde im Perihel einen größten und im Aphel einen kleinsten Wert annimmt. Die mittlere Bahngeschwindigkeit beträgt

$$\overline{v} = 29{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Die genaue Umlaufdauer der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne hängt von der Wahl des Koordinatensystem ab. In Bezug auf ein <u>ortsfestes</u> System, daß durch die praktisch unbeweglichen Fixsterne gegeben ist, mißt man das <u>siderische</u> Jahr; es ist die Zeitspanne zwischen zwei Vorübergängen der Sonne am gleichen Stern und beträgt

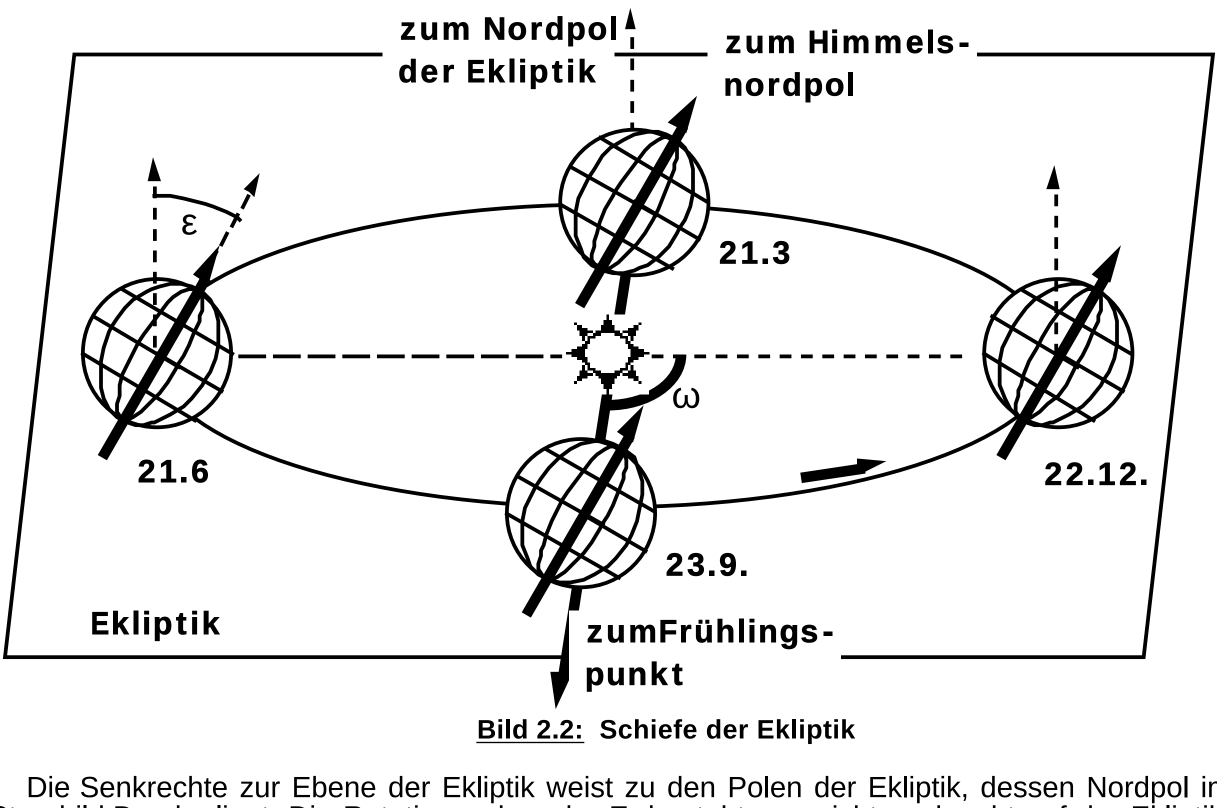
1 siderisches Jahr = 365,256360 Tage

Für die Kalenderrechnung ist jedoch die Zeitspanne zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den <u>Frühlingspunkt</u> (s.u.) von Bedeutung; diese Zeitspanne definiert das <u>tropische</u> Jahr und dauert

1 tropisches Jahr = 365,242199 Tage.

Der Grund für die unterschiedliche Länge liegt in der Präzessionsbewegung der Erde (s.u.).

2.2 <u>Schiefe der Ekliptik</u>



<u>Bild 2.2:</u> Schiefe der Ekliptik

Die Senkrechte zur Ebene der Ekliptik weist zu den Polen der Ekliptik, dessen Nordpol im Sternbild Drache liegt. Die Rotationsachse der Erde steht nun nicht senkrecht auf der Ekliptik, sonder schließt mit ihrer Senkrechten einen Winkel ε von etwa 23,5 Grad ein, den man als

Schiefe der Ekliptik bezeichnet und der auch zwischen der Äquatorebene der Erde und der Ekliptikebene auftritt:

$$\varepsilon = 23^{o}\,27\,' = 23{,}45^{o}$$

In den Verlängerungen der Erdachse liegen die Himmelspole, und der nördliche Himmelspol befindet sich (z. Zt.) nur etwa $0{,}9^{o}$ vom Stern α des kleinen Bären (Polarstern) .

Von der Erde aus gesehen scheint die Sonne bei ihrer jährlichen Bahn vor dem Hintergriund der zwölf Tierkreis-Sternbilder vorüberzuziehen (s. Bild 2.3).

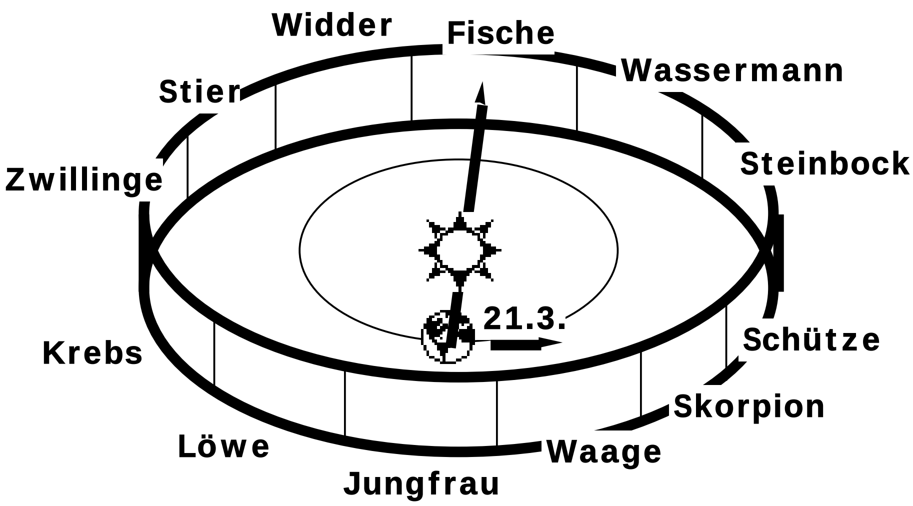


Bild 2.3: **Tierkreis**

Verlängert man die Schnittgerade, in der sich die Äquatorebene der Erde und die Ebene der Ekliptik schneiden, von der Frühlingsposition der Erde hinaus über die Sonne hinaus, gelangt man zu einem Punkt des Himmels, der als Frühlingspunkt bezeichnet wird. Er liegt heute im Sternbild Fische und hat zur Zeit seiner Einführung vor rund 2000 Jahren im benachbarten Sternbild Widder gelegen, weshalb man ihn auch Widderpunkt (Aries) nennt.

Der Winkel zwischen den Richtungen zum Frühlingspunkt und zum Perihel beträgt $\omega = 103^{o}$ (Länge des Perihels). Die Ursache für die Verschiebung des Frühlingspunktes liegt in der Präzessionsbewegung der Erdachse.

2.3 Präzessionsbewegung der Erde

Bei der Drehung der Erde um ihre eigene Achse treten Kräfte auf, die eine Deformation der Erdkugel bewirken: der Äquatorradius ist um fast 1/ 300 größer als der Polradius. Die Gravitationskräfte der Sonne und insbesondere des Mondes wirken nun nach den Gesetzen der Kreiselmechanik auf die nicht mehr kugelförmige Erde in der Weise, daß ihre Drehachse nicht mehr raumfest ist. Sie bewegt sich auf einem Kegelmantel, dessen Achse zum Pol der Ekliptik zeigt und der einen Öffnungswinkel von 2ε besitzt (Lunisolar-Präzession).

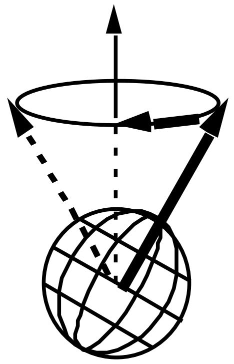


Bild 2.4: Präzession der Erdachse

Bild 2.5: Präzession des Himmelspols [1]

Die Erdachse benötigt für einen Umlauf auf dem Präzessionskegel etwa 25.700 Jahre. In dieser Zeit kreist auch der Himmelspol um den Pol der Ekliptik. Bild 2.5 zeigt die Lage des Himmelspols am Sternenhimmel in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. Die Zahlenangaben sind Jahreszahlen, negatives Vorzeichen bedeutet Jahre v. Chr.

Mit der Präzessionsbewegung der Erdachse dreht sich auch die Schnittgerade zwischen Äquatorebene und Ekliptik und damit der Frühlingspunkt in 25.700 Jahren um 360 Grad, und zwar in entgegengesetzter Richtung zur Erdbahn in der Ekliptik. Daher ist das tropische Jahr kürzer als das siderische.

3. Zeitrechnung

3.1 Das Kalenderjahr

Da unser tägliches Leben durch die Folge von Tag, Nacht und Jahreszeiten bestimmt wird, ist es zweckmäßig, unseren Zeitablauf durch die Bewegung der Sonne und nicht der Sterne festzulegen. Grundlage unseres Kalenders ist das tropische Jahr. Nur dieses gewährleistet die gleichbleibende Lage der Jahreszeiten und der christlichen Kirchenfeste innerhalb des Kalenderjahres.

Da das Jahr aus praktischen Gründen eine ganze Zahl von Tagen umfassen soll, ist eine Abweichung im Laufe der Zeit unvermeidlich. Bei dem von Cäsar 46 v. Chr. eingeführten Julianischen Kalender folgte 3 Jahren von je 365 Tagen ein Schaltjahr mit 366 Tagen. Dies entspricht einer mittleren Länge des Sonnenjahres von 365,25 Tagen.

Der Termin des Osterfestes ist seit dem Konzil von Nizäa (325) auf den ersten Sonntag nach dem ersten Vollmond nach Frühlingsbeginn festgelegt. Im 16. Jahrhundert war der Frühlingsbeginn bereits auf den 11. März vorgerückt. Die von Papst Gregor XIII im Jahre 1582 vorgenommene Kalenderreform ließ deshalb 10 Kalendertage ausfallen und führte eine neue Schaltvorschrift ein, um künftig eine bessere Übereinstimmung des Kalenderjahres mit der Länge des tropischen Jahres zu erreichen: auf 3 Jahre mit 365 Tagen folgt ein Schaltjahr mit 366 Tagen, wenn die Jahreszahl durch 4 teilbar ist, außer in den Hunderter-Jahren, deren Jahreszahl nicht durch 400 teilbar ist. Die Länge des Gregorianischen Jahres beträgt demnach:

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} = 365{,}2425 \text{ Tage}$$

und führt erst nach 3300 Jahren auf eine Abweichung von einem Tag.

3.2 Wahre und mittlere Sonnenzeit

Die Kulmination der wahren Sonne bestimmt den Zeitpunkt T_W =12 Uhr am Ort des Beobachters, und ihre Bewegung wird von einer einfachen Sonnenuhr angezeigt. Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen bestimmt den Sonnentag. Seine Länge ist im Laufe eines Jahres jedoch nicht konstant; hierfür sind zwei Gründe verantwortlich:

- Die Erdbahn um die Sonne ist kein Kreis sondern eine Ellipse und dieBahngeschwindigkeit nicht konstant.
- Wegen der Schiefe der Ekliptik fällt die scheinbare Sonnenbahn nicht mit der Äquatorebene zusammen.

Um eine gleichmäßig ablaufende Sonnenzeit zu erhalten, definiert man eine fiktive mittlere Sonne. Diese geht gleichzeitig mit der wahren Sonne durch den Frühlingspunkt, bewegt sich auf dem Himmelsäquator, hat während des gesamten jährlichen Umlaufs konstante Bahngeschwindigkeit und benötigt bis zum nächsten Durchgang durch den Frühlingspunkt wie die wahre Sonne genau ein (tropisches) Jahr.

Diese fiktive mittlere Sonne definiert die mittlere Sonnenzeit T_M. Die Zeitdifferenz zur wahren Sonnenzeit bezeichnet man als Zeitgleichung:

$$\text{Zeitgleichung} = T_W - T_M \,.$$

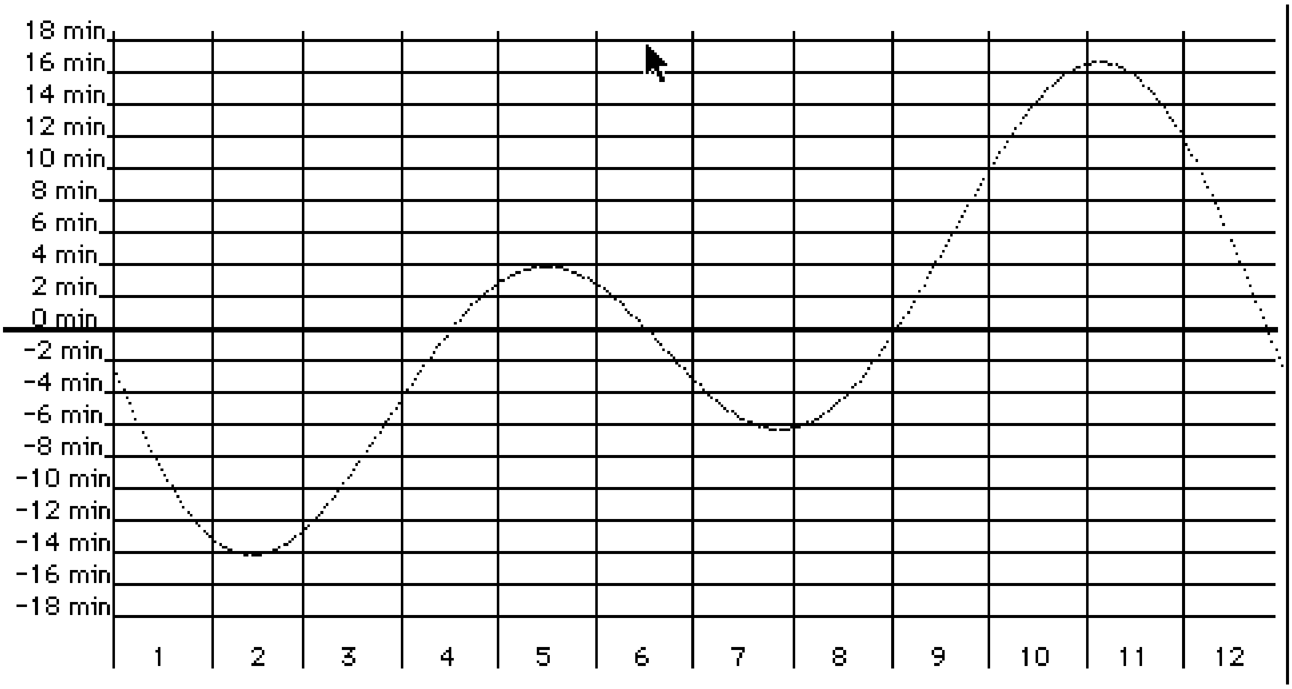


Bild 3.1: Zeitgleichung

Die Zeitgleichung hat ihre Extremwerte von etwa $+16\frac{1}{2}$ Minuten am 4.11. und $-14\frac{1}{4}$ Minuten am.12.2. Eine Sonnenuhr geht um die Werte der Zeitgleichung falsch, wenn diese nicht in geeigneter Weise berücksichtigt wird. Eine Tabelle mit den genauen Werten für 1991 findet sich im Anhang.

3.2 Zonenzeit

Sowohl die wahre als auch die mittlere Sonnenzeit sind Ortszeiten. Wegen der Eigendrehung der Erde von Ost nach West kulminiert die Sonne für einen Beobachtungsort, der sich weiter östlich befindet als der Vergleichsort, früher. Jeder Längengrad der Erde hat also seine eigene Ortszeit, wobei 15 Längengrade einen Zeitunterschied von 1 Stunde ausmachen (1 Längengrad $\hat{=}$ 4 Zeitminuten). . Da Ortszeiten im täglichen Leben unzweckmäßig sind, wurde Ende des 19. Jahrhunderts die Erde in 24 Zeitzonen eingeteilt. Für alle Orte innerhalb jeder Zeitzone gilt dieselbe Zonenzeit, die durch die mittlere Ortszeit der geographischen Länge 0^o, 15^o, 30^o bis 345^o gegeben ist und sich von der der benachbarten Zeitzone um genau eine Stunde unterscheidet.

Die Zeitzone des Nullmeridians, der durch Greenwich verläuft, ist die Weltzeit (UT = Universal Time oder GMT = Greenwich Mean Time).

Die in Deutschland gültige Mitteleuropäische Zeit (MEZ) ist die mittlere Ortszeit des 15. Längengrades östlicher Länge, der durch Görlitz (an der Neiße, Sachsen) verläuft. Die bei uns seit 1980 eingeführte Sommerzeit (MESZ) geht der MEZ um eine Stunde voraus. Es gilt also

$$\text{MEZ} = \text{GMT} + 1\ \text{h}$$

$$\text{MESZ} = \text{GMT} + 2\ \text{h}$$

Entsprechend der Lage Werls auf etwa 8^o östlicher Länge kulminiert die Sonne um $(15^o - 8^o)\cdot 4\ \text{min}/^o = 28$ Minuten später als auf dem Zonenmeridian. Kulminiert die Sonne also am 14.6.

(Zeitgleichung = 0) in Görlitz, ist es dort 13 Uhr MESZ, und in Werl erreicht die Sonne ihren Höchststand erst um 13 Uhr 28 MESZ.

Die in Kalendern angegebenen Auf- und Untergangszeiten für Sonne und Mond gelten für einen in Deutschland zentralen Ort (z.B. Kassel, 51.3^o Nord, 9.4^o Ost) und ändern sich für andere Orte nicht nur gemäß ihrer abweichenden geographischen Länge sondern auch noch entsprechend der Breite.

4. Astronomische Koordinatensysteme

Das für den irdischen Beobachter naheliegende Koordinatensystem ist das Horizontsystem. Er befindet sich im Mittelpunkt M einer Ebene, die die Erdkugel im Beobachtungsort berührt und die Himmelskugel entlang des Horizontes schneidet.

4.1 Das Horizontsystem

Der Punkt Z senkrecht über dem Beobachter ist der Zenit. Großkreise (d.h. Mittelpunkt in M) durch den Zenit werden als Vertikale bezeichnet. Der Vertikal durch Nordpunkt N, Zenit Z und Südpunkt S heißt Meridian. Er liegt in derselben Ebene wie der Längenkreis des Beobachtungsortes (vgl. Bild 4.3)

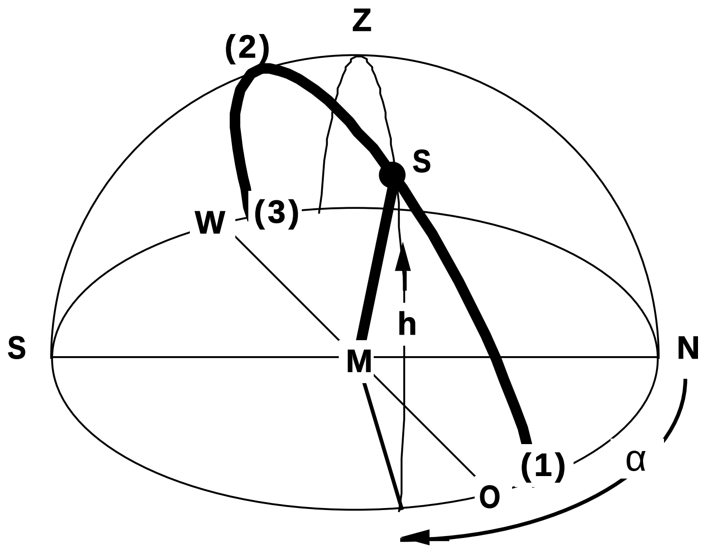


Bild 4.1: Horizontsystem

Die scheinbare Bewegung der Sonne (Tagbogen) beginnt im Aufgangspunkt (1) im Osten . Sie erreicht den höchsten Punkt (2) ihrer Bahn, die Kulmination, im Meridian (für Orte der nördlichen Halbkugel im südlichen Teil des Meridians) und geht im Westen in Punkt (3) unter.

Die Koordinaten der Sonne im Horizontsystem für einen beliebigen Punkt P ihres Tagbogens sind:

1. der **Höhenwinkel h**; er wird vom Horizont aus entlang des durch P verlaufenden Vertikals gemessen und liegt im Intervall von 0^o bis 90^o. Der Höhenwinkel zur Zeit der Kulmination wird als Mittagshöhe bezeichnet. Statt des Höhenwinkels verwendet man gelegentlich auch die Zenitdistanz z; sie ist der Winkel zwischen der Sonne und dem Zenit. Es gilt z = 90^o:- h.

2. das **Azimut α**; es ist der Winkelabstand des Vertikals von der Nordrichtung und wird im Uhrzeigersinn von 0^o bis 360^o gemessen.

Der Nachteil des Horizontsystems besteht darin, daß beide Koordinaten von der geographischen Lage des Beobachtungsortes auf der Erde abhängen.

4.2 Das Äquatorsystem

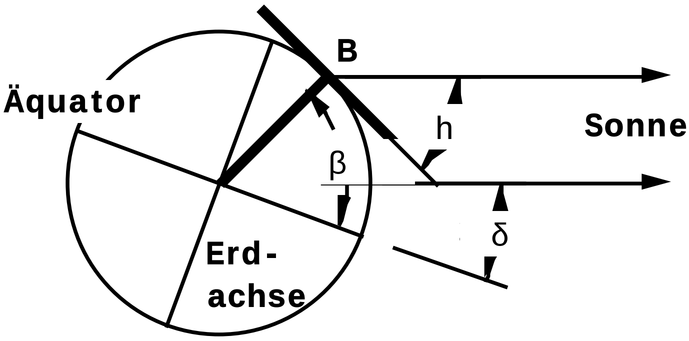


Bild 4.2: **Äquatorsystem**

Bild 4.3: **Äquatorsystem [2]**

Beim Äquatorsystem projiziert man die Erdkugel von ihrem Mttelpunkt aus auf die Himmelskugel (s. Bild 4.3). Aus dem Erdäquator wird der Himmelsäquator, und die Längenkreise der Erdkugel werden zu Längenkreisen auf der Himmelskugel. Dem Meridian des Beobachters entspricht sein Himmelsmeridian. Die Koordinaten eines Objektes sind im Äquatorsystem sind:

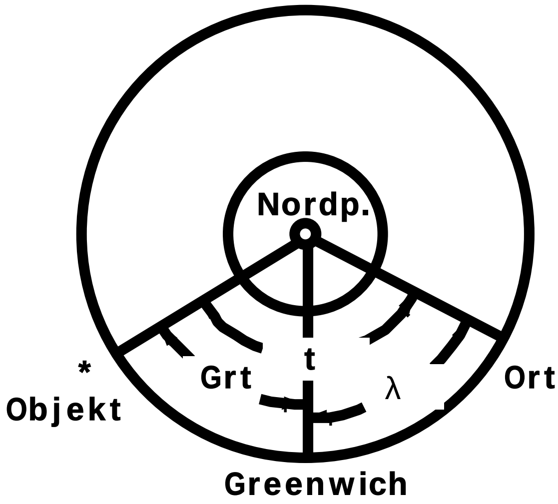
1. die **Deklination** δ**.;** sie gibt den Winkelabstand eines Objekts vom Äquator an; ihr Wert ist unabhängig von der Eigendrehung der Erde und wird nordwärts (N) und südwärts (S) jeweils 0^{o} bis 90^{o} gezählt. Die Deklination der Sonne ändert sich bei der jährlichen Bahn der Erde um die Sonne zwischen $23{,}5^{o}$ S am 22.12., 0^{o} am 21.3. und 23.9. und $23{,}5\ ^{o}$ N am 21.6.

2. der **Stundenwinkel** **t;** er wird zwischen dem Meridian und dem Stundenkreis des Objektes gemessen und liegt zwischen 0^{o} und 360^{o}. Da dieser Winkel vom Ort, genauer von der geographischen Länge des Beobachters abhängt, wird er auch als Otrsstundenwinkel bezeichnet.
In der astronomischen Navigation mißt man den Stundenwinkel des Objektes bis zum bis zu dem Meridian, der dem durch Greenwich laufenden Längenkreis entspricht und nennt ihn dann Greenwich-Stundenwinkel (GrStW). Die Stundenwinkel ändern sich mit der Eigendrehung der Erde.
Der Winkel zwischen dem Stundenkreis des Frühlingspunktes und demStundenkreis eines Fixsterns ist nahezu unveränderlich. Dieser als Rektascension bezeichnete Winkel wird zudammen mit der ebenfalls von der Eigendrehung der Erde unabhängigen Deklination in der Astronomie zur Angabe von Sternörtern benutzt.

Der Zusammenhang zwischen dem Ortsstundenwinkel t eines Objekts, seinem Greenwich-Stundenwinkel Grt und der geographischen Länge λ des Beobachters ergibt sich aus Bild 4.4 (NP = Nordpol):

$$t = Grt + \lambda$$

Bild 4.4: **Stundenwinkel**



5. Der Tagbogen der Sonne

Aus Bild 4.2 ergibt sich für den Zusammenhang zwischen dem Höhenwinkel h des Horizontsystems zum Zeitpunkt der Kulmination und der Deklination δ für einen Beobachtungsort B mit der geographischen Breite β:

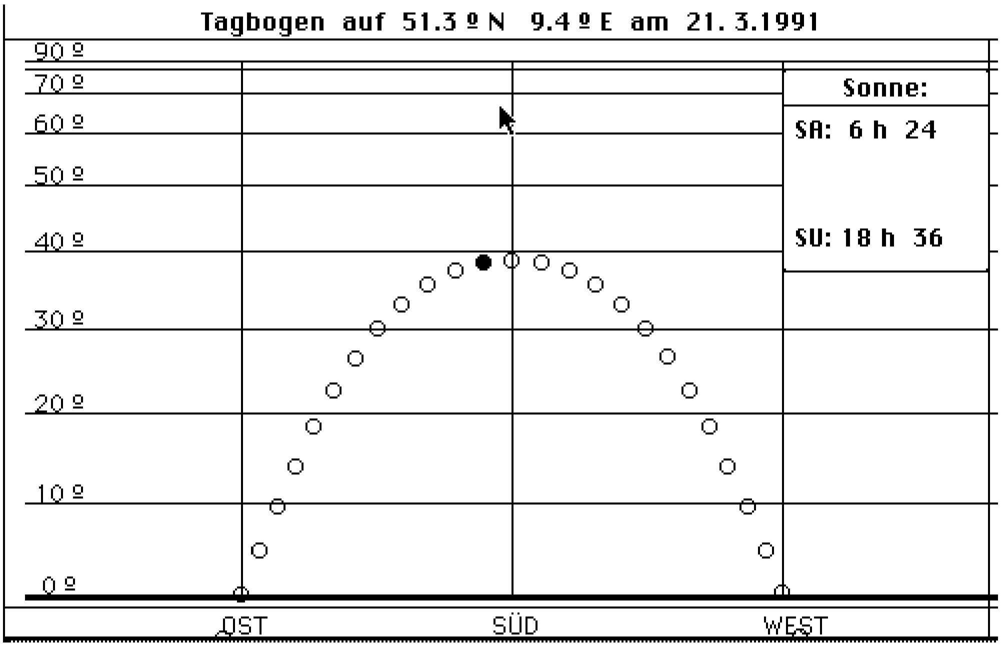
$$h = 90^{o} - \beta \pm \delta$$

Das Pluszeichen gilt für nördliche Deklination (Sommer), das Minuszeichen für südliche (Winter)

Die Bilder 5.1 bis 5.4 zeigen die mit dem Computerprogramm SOLARIUM für den zentralen Ort Kassel. berechnete Tagbögen mit den Positionen der Sonne in halbstündigen Abständen. Der schwarz ausgefüllte Kreis gilt für 12 Uhr mittler Zonenzeit. Seine Abweichung von der Südlinie beruht auf der vom Zonenmeridian abweichenden Lage (≈ 22,5 Zeitminuten) und der Zeitgleichung. Außerdem sind die Auf- und Untergangszeiten der Sonne (SA, SU) für den Sonnenoberrand eingeblendet.

5.1 Am 21. 3.

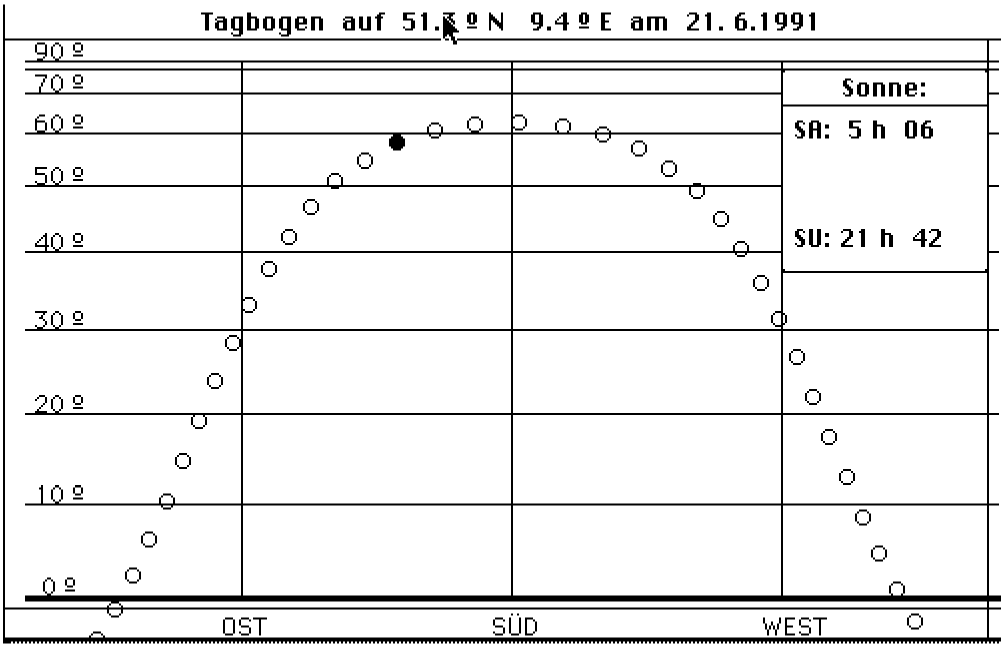
Bei Frühlingsbeginn geht die Sonne genau im Ostpunkt auf (Azimut $\alpha = 90^{o}$) und genau im Westpunkt unter ($\alpha = 270^{o}$). Für Werl ($\beta \approx 51{,}5^{o}$) beträgt die größte Höhe auf ihrem Tagbogen (Mittagshöhe) $h = 38{,}5^{o}$ und die Tageslänge 12 Stunden;Tag und Nacht sind gleichlang (Frühlings-Äquinoktium). Die Zeitgleichung hat den Wert Zgl ≈ - 7,5 min, so daß die wahre Sonne erst um 12 Uhr 30 mittlerer Zonenzeit kulminiert.



<u>Bild 5.1:</u> Tagbogen am 21.3.

5.2 <u>Am 21. 6.</u>

Zu Beginn des Sommers liegen Auf- und Untergangspunkt in nord-östlicher bzw nord-westlicher Richtung. Mittagshöhe und Tageslänge erreichen ihre maximalen Werte mit h = 62^o und 16 1/2 Stunden Die zusätzliche Zeitverschiebung durch die Sommerzeit lassen die Sonne erst um 13 Uhr 25 MESZ kulminieren.



<u>Bild 5.2:</u> Tagbogen am 21.6.

5.3 <u>Am 23. 9.</u>

Der Tagbogen bei Herbstbeginn stimmt mit dem bei Frühlingsbeginn überein (Herbst-Äquinoktium).

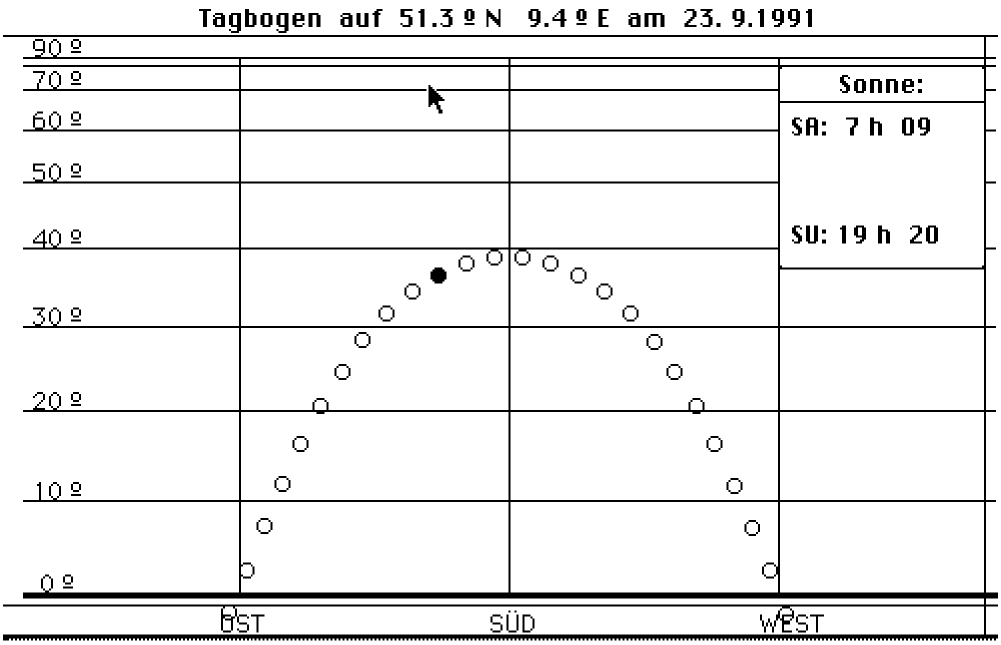


Bild 5.3: **Tagbogen am 23.9.**

5.4 Am 21. 12

Auf- und Untergangspunkte sind in südliche Richtung verschoben. Die Sonne erreicht mittags nur noch die Höhe h = 15^{o} und die Tageslänge sinkt auf 9 Stunden.

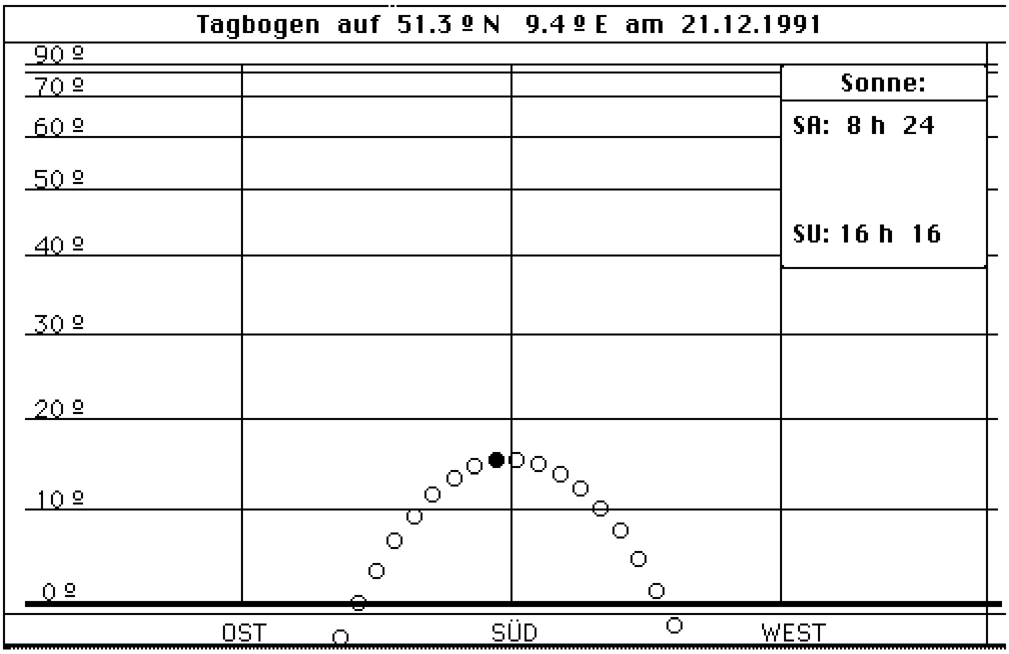


Bild 5.4: **Tagbogen am 21.12.**

6. Sonnenuhren

6.1 Grundformen

Die meisten Sonnenuhren bestehen aus einem Schattenstab, der parallel zur Erdachse ausgerichtet ist. Aus Bild 4.2 ergibt sich, daß der Winkel, den der zur Erdachse parallele Schattenstab mit der Horizontalebene bildet, mit der geographischen Breite β des

Beobachtungsortes übereinstimmt. Der Schatten fällt auf eine Fläche, die mit einem Zifferblatt versehen ist. Sie kann unterschiedlich ausgerichtet sein :

parallel zur Horizontalebene (horizontale Sonnenuhr)

senkrecht zur Horizontalebene (vertikale Sonnenuhr)

parallel zur Erdachse (polare Sonnenuhr) oder

parallel zur Äquatorebene (äquatoriale Sonnenuhr).

Bild 6.1: Kombination verschiedener Sonnenuhren für einen Ort der geogr. Breite ϕ [3]

7. Horizontale analemmatische Sonnenuhr

Eine horizontale Sonnenuhr mit senkrecht stehendem Schattenstab ist besonders einfach im Aufbau und bietet darüber weitere Vorteile:

- im Gegensatz zu Vertikal-Uhren ist sie für jede Uhrzeit zwischen Sonnenauf- und Untergang brauchbar;
- die Zeitgleichung kann exakt berücksichtigt und die genaue mittlere Zonenzeit abgelesen werden;
- verwendet man zur Ablesung die Spitze des Gnomons, läßt sich außer der Uhrzeit auch noch das Datum ablesen.

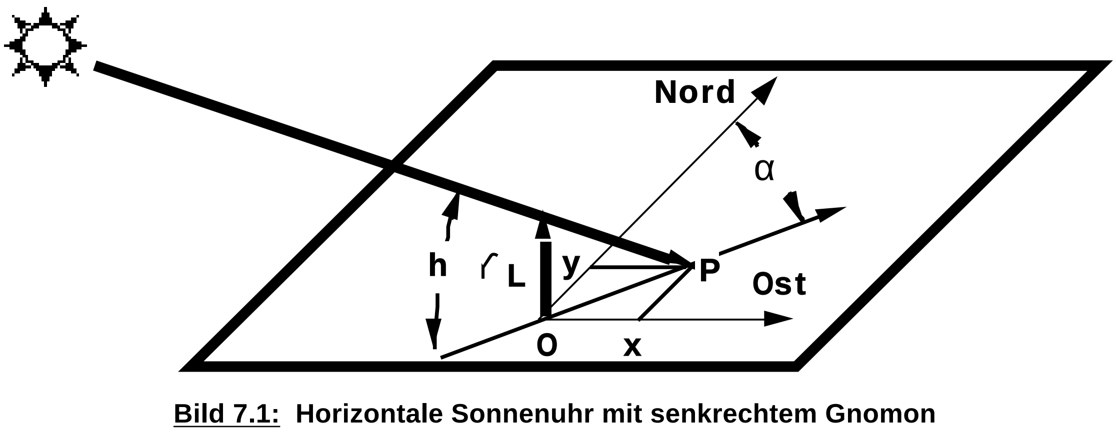
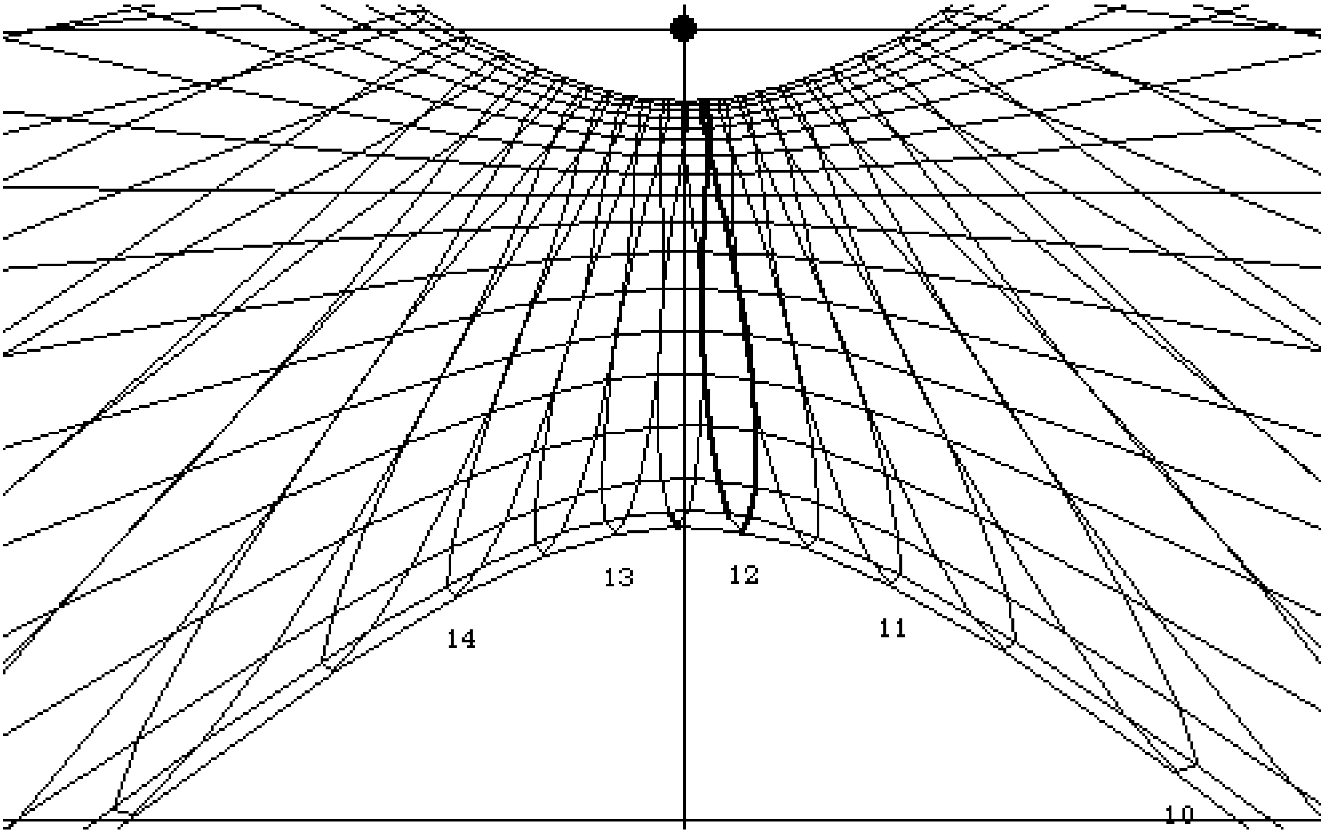


Bild 7.1: Horizontale Sonnenuhr mit senkrechtem Gnomon

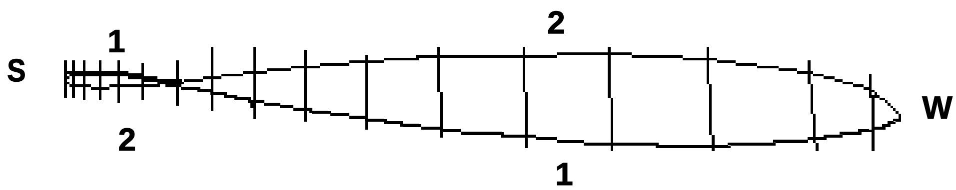


<u>Bild 7.2:</u> Schattenlinien

Bild 7.2 ist mit Hilfe des Computerprogramms SOLARIUM berechnet und gezeichnet. Der schwarze Punkt ist der Fußpunkt des Gnomons.

Die quer laufenden <u>Tages- oder Datumslinien</u> stellen jeweils den Gang der Schattenspitze während eines bestimmten Tages dar und werden von rechts (West) nach links (Ost) durchlaufen. Die Linien für Tage mit gleicher Deklination der Sonne fallen zusammen, so daß jede Linie für einen Tag des Sommerhalbjahres und einen Tag des Winterhalbjahres gilt, deren zeitlicher Abstand zum Tag der Sommer- bzw. Wintersonnenwende gleich ist. Bei Frühlings- und Herbstbeginn ergibt sich eine gerade Tageslinie, die genau in Ost-West-Richtung verläuft.

Die einer 8 gleichenden <u>Stundenlinien</u> ergeben sich, wenn man an jedem Tag des Jahres zu einer bestimmten Uhrzeit den Schattenpunkt markiert. In Bild 7.2 sind diese als Analemmata bezeichneten Linien in halbstündlichen Abständen aufgezeichnet. Ohne die Zeitgleichung wären die Stundenlinie Geraden. Der Linienzug 1 von S (Sommer-Sonnenwende) nach W (Winter-Sonnenwende) gilt für das Sommer-Halbjahr, der Linienzug 2 von W nach S für das Winter-Halbjahr.



<u>Bild 7.3:</u> Analemma

<u>8. Berechnung der Schattenpunkte</u>

m Ursprung O der Horizontalebene (s. Bild 6.2) befindet sich ein senkrechter Schattenstab (Gnomon) der Länge L. Der Schattenpunkt P seiner Spitze hat die rechtwinkligen Koordinaten (x,y). Es gilt

$$x = \overline{OP} \sin \alpha' = \frac{L}{\tan h} \sin \alpha$$

$$y = \overline{OP} \cos \alpha' = -\frac{L}{\tan h} \cos \alpha$$

wobei das Azimut α der Sonne um 180^{o} größer als das Azimut α' des Schattens ist. Um diese Koordinaten zu berechnen, benötigt man den Höhenwinkel h und das Azimut a der Sonne.

Die Koordinaten h und a des Horizontsystems hängen von der geographischen Breite β des Beobachtungsortes ab; sie ergeben sich aus den Koordinaten des Äquatorsystems (Deklination d und Stundenwinkel t) mit Hilfe des Seiten-Kosinus-Satzes der sphärischen Geometrie für das Kugeldreieck ABC ("sphärisch-nautisches Dreieck"); es wird gebildet vom Beobachtungsort A, dem Bildpunkt B der Sonne (Duchstoßungspunkt der Geraden vom Erdmittelpunkt zur Sonne durch die Kugel) und dem Pol C.

Bild 8.1: **sphärisch-nautisches Dreieck [4]**

Man erhält

$$(1) \quad \sin h = \sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta \cos(t \pm \lambda)$$

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{\sin \delta - \sin \beta \sin h}{\cos \beta \cos h}$$

In Formel (1) ist λ die geographische Länge des Beobachtungsortes; das Pluszeichen gilt für Orte mit östlicher, das Minuszeichen für Orte mit westlicher Länge.

Die von der Zeit abgängigen Sonnen-Koordinaten Deklination β und Stundenwinkel t findet man in astronomischen oder nautischen Jahrbüchern, die zum Zweck der Navigation in der Seefahrt herausgegeben werden.

Bei der Berechnung des Höhenwinkels und der Schattenpunkte muß noch die Refraktion (Brechung) der Lichtstrahlen durch die Erdatmosphäre berücksichtigt werden (s. Bild 8.2). Beobachtet man vom Punkt B aus das Objekt G_1, erscheint es in Richtung E, also unter einem scheinbaren Höhenwinkel h', der größer ist als der wahre Höhenwinkel h ist. Ist R der Brechungswinkel, gilt

$$h' = h + R \quad \text{mit } R = 58{,}2 \text{ Winkelsekunden} * \tan(90^{o} - h')$$

Je geringer der Höhenwinkel, desto stärker wirkt sich die Refraktion aus. Am Horizont beträgt die Refraktion etwa 35 Winkelminuten; der Oberrand der Sonne (Radius ≈ 16 Winkelminuten) wird also bereits sichtbar, wenn er noch 51 Winkelminuten unter dem Horizont steht. In 90^{o} beträgt die Refraktion jedoch nur noch

Bild 8.2: Refraktion des Lichtes[5]

Bild 8.3: Refraktionswinkel

Das Computerprogramm SOLARIUM berechnet die Deklination und den Stundenwinkel der Sonne mit einer Näherungsformel, die für viele Jahre Werte hoher Genauigkeit liefert. Bild 8.4 vergleicht die Werte mit denen des Nautischen Jahrbuches am 1.7.1991. Der Unterschied zwischen MESZ und GMT betägt 2 Stunden. Die auftretende Differenz beträgt beim Greenwich-Stundenwinkel (GHA bzw. Grt) 0,5 Winkelminuten≈0,008 Grad und bei der Deklination 0,1 Winkelminuten≈0,002 Grad.
Höhe, Azimut und die Koordinaten (X, Y) des Schattenpunktes (Schattenstab von 100 mm Länge) sind für den zentralen Ort Kassel berechnet (Zeitangaben in MESZ).

Die für Werl (Marien-Gymnasium) gültigen geographischen Koordinaten entnimmt man einer Karte (z.B. Kreiskarte Soest, 1:50.000):

Breite β = 51º 33,4' N

Länge λ = 7º 54,3' E

wobei 0,1' weniger als 100 m ausmachen.

ZONEN-ZEIT	GrStW Gr.	GrStW min	DEKL. Gr.	DEKL. min	HOEHE Gr.	AZIMUT Gr.	X mm	Y mm
5.30	231	35.7	23	8.9	1.62	53.6	0.0	0.0
6.00	239	5.6	23	8.8	5.52	59.3	861.2	-512.3
6.30	246	35.5	23	8.8	9.66	64.8	526.2	-247.4
7.00	254	5.5	23	8.7	13.98	70.3	376.0	-134.6
7.30	261	35.4	23	8.6	18.46	75.8	289.4	-73.4
8.00	269	5.3	23	8.5	23.06	81.3	231.7	-35.6
8.30	276	35.3	23	8.5	27.71	86.9	189.8	-10.3
9.00	284	5.2	23	8.4	32.40	92.7	157.2	7.5
9.30	291	35.2	23	8.3	37.06	98.9	130.7	20.5
10.00	299	5.1	23	8.2	41.63	105.6	108.3	30.2
10.30	306	35.0	23	8.1	46.06	113.0	88.7	37.6
11.00	314	5.0	23	8.0	50.23	121.2	71.1	43.1
11.30	321	34.9	23	8.0	54.03	130.6	55.1	47.2
12.00	329	4.9	23	7.9	57.28	141.4	40.1	50.2
12.30	336	34.8	23	7.8	59.80	153.7	25.8	52.1
13.00	344	4.7	23	7.7	61.36	167.4	11.9	53.3
13.30	351	34.7	23	7.6	61.80	181.9	-1.8	53.6
14.00	359	4.6	23	7.6	61.06	196.3	-15.5	53.1
14.30	6	34.6	23	7.5	59.22	209.6	-29.4	51.7
15.00	14	4.5	23	7.4	56.49	221.6	-43.9	49.5
15.30	21	34.4	23	7.3	53.07	232.0	-59.2	46.3
16.00	29	4.4	23	7.2	49.16	241.0	-75.6	41.8
16.30	36	34.3	23	7.1	44.91	249.0	-93.6	35.9
17.00	44	4.3	23	7.1	40.44	256.2	-113.8	28.0
17.30	51	34.2	23	7.0	35.83	262.7	-137.2	17.6
18.00	59	4.1	23	6.9	31.16	268.8	-165.1	3.5
18.30	66	34.1	23	6.8	26.48	274.6	-199.8	-16.0
19.00	74	4.0	23	6.7	21.83	280.2	-245.2	-43.9
19.30	81	34.0	23	6.6	17.26	285.6	-308.8	-86.4
20.00	89	3.9	23	6.6	12.81	291.1	-407.6	-157.3
20.30	96	33.8	23	6.5	8.53	296.6	-588.2	-294.5
21.00	104	3.8	23	6.4	4.44	302.2	-1036.4	-652.4

Bild 8.3: Vergleich der Werte von SOLARIUM mit dem nautischen Jahrbuch [7]

Genau genommen muß die Sonnenuhr für jedes Jahr neu berechnet werden. Jedoch wiederholen sich die Werte innerhalbt bestimmter Genauigkeitsgrenzen alle vier Jahre. Die Tabelle 8.4 zeigt die Deklination δ der Sonne für verschiedene Jahre jeweils am 1. April:

Jahr	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
δ in Grad min	4 ° 27	4 ° 21	4 ° 16	4 ° 33	4 ° 28	4 ° 22	4 ° 16	4 ° 34

Tabelle 8.4: Deklination

In der Praxis genügt es jedoch, die Sonnenuhr für ein Jahr mit einem mittleren Wert zu berechnen, z.B. für das Jahr 1993.

9 Quellen

[1] Herrmann, J: dtv-Atlas Astronomie; Deutscher Taschenbuch-Verlag, München 1980.

[2] Mitton, S. (Hrsg.): Cambridge Enzyklopädie der Astronomie, Orbis, München 1989.

[3] Zenkert, A.: Faszination Sonnenuhr; Deutsch, Frankfurt 1984.

[4] Schenk, B.: Yachtnavigation; Delius, Klasing & Co, Bielefeld 1981.

[5] Stein, W: Astronomische Navigation; Klasing, Bielefeld 1980.

[6] Karttunnen, H. (Hrsg.): Astronomie, Springer, Berlin 1990

[7] Nautisches Jahrbuch oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1991; Bundesamt für Seeschiffahrt und Hydrographie.

[8] Bronstein, Semendjajew: Taschenbuch der Mathemetik, Deutsch, Frankfurt 1980.

10. Weitere Lteratur

Hempe, K., Molt, J.: Sterne im Computer, Rudolf Müller, Köln 1987.

Loske, L.M.: Die Sonnenuhren, Springer, Berlin1970.

Schumacher, H.: Sonnenuhren, Callwey, München 1984.

Rohr, R.: Die Sonnenuhren, Callwey, München 1982.

Montenbruck, O., Pfleger, T.: Astronomie mit dem Personal Computer, Springer, Berlin 1990.

Montenbruck, O: Grundlagen der Ephemeridenrechnung, Verlag Sterne und Weltraum

11. Anhang

1. Sphärische Trigonometrie {8]

2. Zeitgleichung [7]

3. Beispiele für den Selbstbau [3]

Updated: 24.3.98